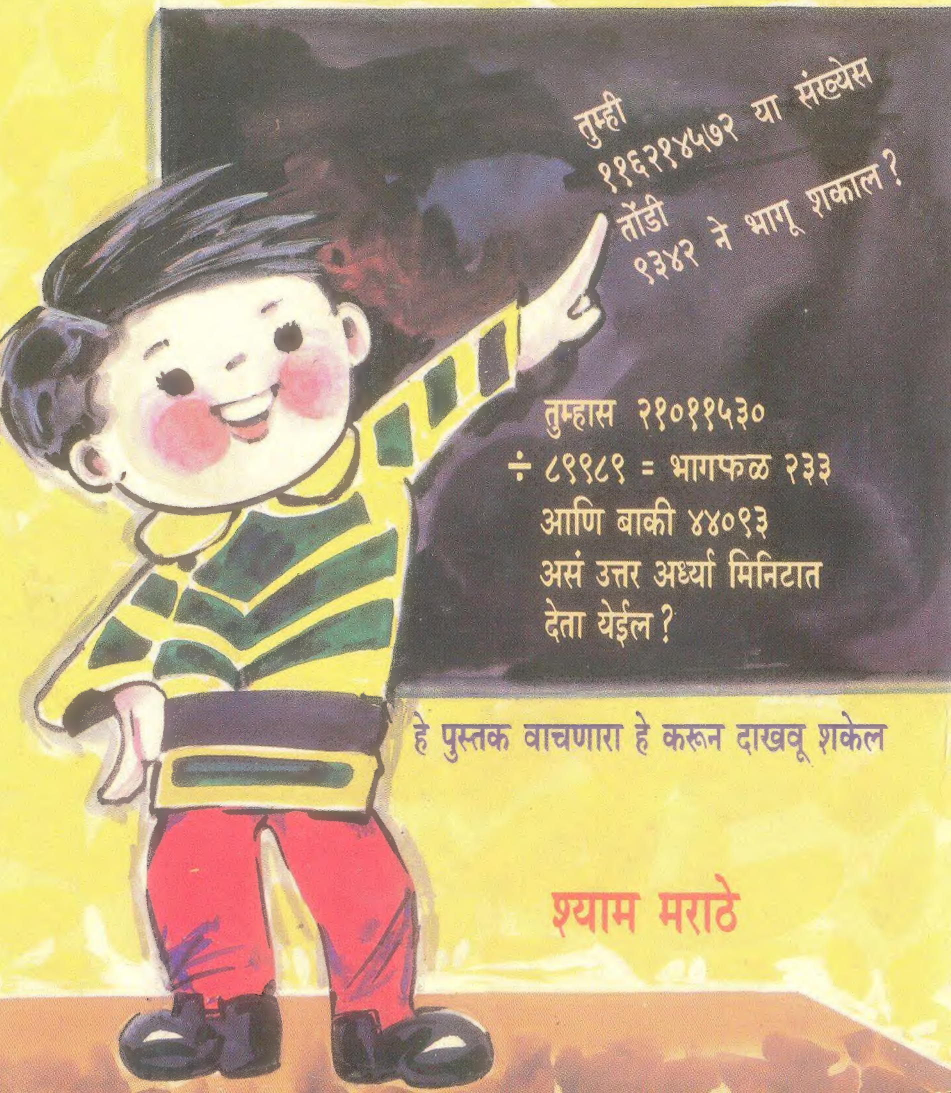
आश्चर्यकारक वेगाने भागाकार



हे पुस्तक वाचणारा हे करून दाखवू शकेल

श्याम मराठे

आश्चर्यकारक वेगाने भागाकार

श्याम मराठे

प्रांतीय व राष्ट्रीय स्तरांवरच्या गणित-स्पर्धा,
आंतरराष्ट्रीय-गणित-ऑलिंपियाड्स, सरकारी क्षेत्रातील नोकर-भरती
चाचण्या यांसाठी आणि वैदिक-गणित व प्राचीन भारतीय गणित
अभ्यासकांसाठी अत्यंत उपयुक्त.

इंद्रायणी साहित्य, पुणे

Ashcharyakarak Vegane Bhagakar

ISBN-81-7418-014-1

मुद्रक/प्रकाशक
श्याम दयार्णव कोपर्डेकर
इंद्रायणी साहित्य
२७३, शनिवार पेठ, पुणे - ३०

मुद्रणस्थळ
प्रमोद वि. बापट
स्मिता प्रिंटर्स
१०१९ सदाशिव पेठ,
पुणे - ३०

अक्षरजुळणी
ला प्रिंट
१०२५/ब, सदाशिव पेठ
पुणे - ३०

प्रकाशन दिनांक
१८ ऑक्टोबर १९९४

मूल्य चाळीस रुपये

वैदिक-गणित निर्माते श्रीमत् (ब्रह्मलीन) गोवर्धनपीठाधीश शंकराचार्य श्रीभारतीकृष्णतीर्थजी महाराज, पुरी, यांच्या स्मृतीस व प्राचीन नि अर्वाचीन भारतीय गणित पद्धतींचा महाराष्ट्रात सातत्याने पुरस्कार करणाऱ्या साऱ्या गणित-रसिकांस अर्पण.

लेखक परिचय

१) श्री. श्याम मराठे यांना अमेरिकन दूरचित्रवाणी, आकाशवाणी, वृत्तपत्रे व विद्यापीठे यांनी **'जगातील चार द्रुत-गती गणितींपैकी एक व जीवंत संगणक'** असे गौरविले आहे.

२) रँड कार्पोरेशन, सँटामोनिका, यू. एस. ए. च्या 'डिपार्टमेंट ऑफ इन्फरमेशन'च्या अद्ययावत् कॉंप्युटरबरोबरच्या स्पर्धेत त्यांनी गणनगतीत कॉंप्युटरलाही हरविले.

३) ब्रह्मलीन स्वामी श्री भारतीकृष्णतीर्थजी महाराज, शंकराचार्य, गोवर्धनपीठ यांच्या वैदिक मॅथेमॅटीक्स्‌चा देश व परदेश हिंडून त्यांनी उल्लेखनीय प्रसार केला आहे.

४) विज्ञान व तंत्रज्ञान या क्षेत्रातील विशेष कामगिरीसाठी महाराष्ट्र विज्ञान यात्रा समिती विद्यमाने त्यांना **मानपत्र** देऊन गौरविण्यात आले आहे.

५) **'सायन्स डायजेस्ट'** या जगत्‌मान्य न्यूयॉर्कहून प्रसिद्ध होणाऱ्या मासिकाच्या मे १९८४ च्या अंकात त्यांच्याविषयी डॉ. क्रिप्टन यांचा लेख प्रसिद्ध झाला आहे.

६) भारतीय आयुर्विमा निगमाचे एक माजी चेअरमन श्री. एस्‌. रंगराजन्‌ यांनी श्री. मराठे यांचा गौरव खालील शब्दांत केला होता.

"Being an Actuary myself and having been involved with the game of numbers nearly all my life, I can perhaps appreciate more than many others the greathness of your talents."

७) कोलंबिया युनिव्हर्सिटी प्रेस, न्यूयॉर्क, यांनी नुकतेच मॅथेमॅटिकल प्रॉडिजीज्‌ ऑफ पास्ट अँड प्रेझेंट' हे पुस्तक प्रकाशित केले आहे. ह्यात श्री. श्याम मराठे यांच्यावर एक प्रकरण आहे.

८) प्रो. एम्‌. श्रेमल, डायरेक्टर, पायरे अँड मेरी युनिव्हर्सिटी, पॅरिस लिहितात, "I had never come across a man with similar talents"

९) नागपूर विद्यापीठाच्या B. Sc. Part - I वर्गासाठी खास तयार केलेल्या क्रमिक पुस्तकात श्री. श्याम मराठे यांच्या एका गणित - ग्रंथातील काही भाग समाविष्ट करण्यात आला आहे.

१०) मराठी भाषेत गणितासारख्या अवघड विषयावर ललित, रसाळ व अत्यंत सोप्या भाषेत लेखन करणारे एकमेव लेखक हे त्यांचे सार्थ वर्णन होईल.

मनोगत

माझ्या द्रुतगणितकोश-स्वरूपी पुस्तकांतून (भारतीय द्रुत-गणिताच्या अद्भुत रीती व द्रुत गणित वेद) अंकगणिताच्या अनेक परिक्रिया चर्चिल्या गेल्या आहेत.

सामान्य विद्यार्थ्यास त्यापैकी काहींचा दैनंदिन उपयोग नाही. त्यांना मुख्यत्वे लागते **गुणाकार व भागाकार** याविषयी मार्गदर्शन.

तसेच त्या पुस्तकांतील अंक मराठी अंक होते. महाराष्ट्रात व देशात आता सरकारी आदेशांनी हिंदु-अरेबिक अंक या नावाने ओळखल्या जाणाऱ्या इंग्रजी अंकांचा गणित विषयात सर्वत्र वापर अत्यावश्यक ठरवला गेला आहे.

तेव्हा दोन छोटी पुस्तके, गुणाकार व भागाकार एवढ्याच विषयांची, **मूळ पुस्तकांआधारे** छापावी व त्यात अंक इंग्रजी वापरावे अशी अनेक शाळांतून गणित - छंदाचे वर्ग सुट्टीत व अन्यवेळी चालविणाऱ्या शिक्षकांकडून वारंवार मागणी येत होती.

माझे स्नेही श्री. श्यामराव कोपर्डेकर यांनी मदतीचा हात देऊ केल्यावर ही गरज पुरी करण्यात काहीच अडचण राहिली नाही. इंग्रजी अंक वापरून झटपट गुणाकार व झटपट भागाकार करायला शिकवणारी दोन छोटेखानी पुस्तके आता सादर होत आहेत.

सुट्टीतील गणित-छंद वर्ग चालविणाऱ्या हौशी शिक्षकांनी ह्या पाठ्य पुस्तकाच्या आधारे विद्यार्थ्यांना भागाकाराच्या अतिरिक्त पद्धती म्हणून शिकविल्यास विद्यार्थ्यांची आकलन व आविष्कार क्षमता वाढेल.

रसिकांनी यातली सोडवून दाखवलेली सर्व उदाहरणे वाचून नंतर स्वतंत्रपणे सोडवणे फार जरुरीचे आहे. तसे केल्यास भागाकार हा त्यांचा तळहाताचा मळ बनेल.

पुढच्या आयुष्यातही उपयोगी पडणारे असे हे वाङ्मय आहे. गणिताच्या अवांतर वाचनासाठी आज फारच थोडी पुस्तके बाजारात आहेत. कष्टपूर्वक तयार केलेल्या या भागाकारावरच्या पुस्तकाने एकूण **गणिताचीच** गोडी **लागण्यास** नक्की मदत होईल.

— **श्याम मराठे**

अनुक्रमणिका

पुस्तक - विशेष

१) सोडविण्यासाठी भरपूर सराव-उदाहरणे.

२) सर्वत्र इंग्रजी अंकांचा वापर.

३) प्रत्येक गणित-संकल्पनेचे अत्यंत सुबोध विवरण.

आमच्या बालपणाची संध्याकाळ



माझ्या मुलाची संध्याकाळ



त्याच्या मुलाची संध्याकाळ (!)



प्रकरण १ ले

संख्या छोट्या बनवा

गणित म्हणजे आकडेमोड. ही आकडेमोड अचूक करता यावयाची तर आकड्यांची समज वाढवावयास लागते.

'आकड्यांचं जग फार संकुचित, छोटं जग आहे.' असं माझे एक मित्र नेहमी म्हणतात. त्यांना म्हणायचं असतं, सारे आकडे कुठल्या ना कुठल्या प्रकारे एकमेकांशी संबंधित असतात, जोडले गेलेले असतात.

एका संख्येचे दुसऱ्या ज्ञात संख्यांशी जे नाते असते ते कळले की संख्या अधिक सोप्या वाटू लागतात.

ही नाती जसजशी जास्त जास्त ठाऊक होतात तसतसा भागाकार सोपा सोपा होत जातो.

भागाकार म्हणजे तरी काय ?

एका संख्येने दुसरीस भागायचे झाल्यास भाज्य संख्या भाजक संख्येच्या पटीत असल्यास बाकी न उरता भाग जातो.

जो भाग जातो त्यास भाग किंवा भागफळ म्हणण्याची पद्धत आहे.

पूर्ण भाग न गेल्यास बाकी उरते. भागाकार कसा करायचा हे वाचकास माहीत आहे असे येथे गृहित धरले आहे. हा भागाकार वर वर दिसायला एक किचकट गणन कृती आहे यात शंकाच नाही.

पण ही कृती टाळूनही भागाकार झपाट्याने करता येतात.

संख्यांच्या नात्याची जाण येणे त्यासाठी फार आवश्यक असते.

प्रथम आपण संख्यांना लागू पडणाऱ्या असंख्य वैशिष्ट्यांपैकी एक वैशिष्ट्य निवडू.

ते म्हणजे संख्यांचे अवयव पडू शकतात.

अवयव पद्धत

भाजकाचे अवयव पडत असतील तर जितके अवयव पडतील तितक्या वेळा मूळ भाजकाला भागत चला -

उदा. 1896 ÷ 729

729 = 9 × 9 × 9 हे समजा तुम्हास आधीच माहीत असेल तर 1896 ला 3 वेळा 9 ने भागून उत्तर निघेल.

1896 ÷ 9	=	210.666
210.666 ÷ 9	=	23.4073
23.4073 ÷ 9	=	2.6008 वगैरे (उत्तर)

दुहेरी अवयव पद्धत

विशेषतः भाज्य व भाजक दोन्हीचे अवयव पडत असतील तर एक शक्यता निर्माण होते.

दोन्हीत एखादा अवयव तोच असतो. अशावेळी भागाकारासाठी भाजक व भाज्य छोटे बनवता येतात. तेवढाच भागाकार सोपा जातो.

उदा. 597051÷ 243

दोन्ही 3 ने भाग जाणाऱ्या संख्या आहेत

मग सोपे करून घेऊन 199017 ÷ 81

असेही गणित चालेल. परत दोन्हीला 9 ने भाग जाईलसे वाटते. मग गणित आणखीच सोपे झाले. 9 ने दोन्ही बाजूस भागू.

नवे गणित

22113 ÷ 9

आता तोंडी उत्तर काढा 2457 (उत्तर)

***

प्रकरण २

विशिष्ट संख्यांनी भागायच्या सोप्या सोप्या कृती

गुणाकारात एखाद्या संख्येला '100 ने गुणा' म्हटलं की आपण दोन शून्ये उजवीकडे जोडून मोकळे होतो !

तसेच, भागाकारात एखाद्या संख्येला '100 ने भागा' म्हटलं की आपण दशांश - चिन्ह दोन घरे डावीकडे सरकवून मोकळे होऊ.

अशा, **विशिष्ट** संख्येने भागाकार करावयाच्या असंख्य रीती बसवता येतील.

अंकात वैशिष्ट्य असते. त्यामुळे, विशिष्ट भाजकांनाच लागू होतील अशा झटपट रीती सहजी तयार होतात.

जर विशिष्ट भाजकांची संख्या लक्षणीय अशी मोठी असेल तर रोजच्या व्यवहारात त्यांचा उपयोग खूपच वेळा होऊ शकतो.

तात्पर्य, ज्याला अंक गणितात प्राविण्य मिळवावयाचं आहे त्यास सर्वच संख्यांना लागू पडतील अशा रीती खेरीजही काही जादा रीती शिकणे फायद्याचे ठरेल.

केवळ विशिष्ट संख्यांना लागू पडणाऱ्या काही रीती या प्रकरणात आपण पाहू या. याही रीती आपल्याच प्राचीन भारतीय गणितींनी त्यांच्या पुरातन ग्रंथातून लिहिलेल्या सापडतात.

भाग 1

कधी 5 ने भागायची वेळ आली तर ?

प्रकार 1 : संख्येची दुप्पट करा. दशांश चिन्ह एक घर डावीकडे सरकवा की आले उत्तर.

उदा. 4343÷ 5 = किती ?

(1) 4343 ÷ 5

(2) 4343 × 2 = 8686.

(3) दशांश चिन्ह एक घर डावीकडे → 868.6 (उत्तर)

प्रकार 2

5 ने भागायची दुसरी रीत अशी :-

5 ने भागणे हे जणु 10 ने भागणे आहे असे समजून केवळ दशांश चिन्ह एक घर डावीकडे सरकवून टाका.

या नव्या संख्येला नंतर 2 ने गुणा व दुरुस्त उत्तर जाहीर करा.

उदा. 8889 ÷ 5

रीत

(1)............888.9

(2) दोनने गुणा 1777.8

परत बघा :-

उदा. 442 ÷ 5 = किती ?

(1)........44.2

(2)........88.4 **उत्तर**

प्रकार 3

5 ने भागायची याहून एक सोपी रीत आहे :-

उदा. 618 ÷ 5 = किती ?

रीत :

(1) एकं स्थान बघा (8)

त्यास 5 ने भागा. भाग मांडून
पुढे दशांश चिन्ह घ्या. 8 ÷ 5 = 1/3 1
बाकी किती उरली ती पाहा (8-5=3)
तिची दुप्पट दशांश चिन्हाच्या पुढ्यात मांडा......... 1.6
(2) भाज्य संख्येतील उरलेली (म्हणजे एकं स्थान
सोडून राहिलेली) संख्या पाहा. तिची दुप्पट खाली
लिहून बेरीज करा की आले उत्तर

61 × 2 = 122 <u>122</u>

123.6
(उत्तर)

भाग 2

या विभागात आपण गुणाकाराने भाजक सोपा करून घेऊनही कशी सोपी पद्धत भागाकारासाठी मिळवता येईल याची उदाहरणे पाहू या.

15 ने भागायचे आहे ?

भाज्य संख्येची दुप्पट करा.
भाज्य संख्येच्या दुप्पटीस प्रथम10 ने भागा (म्हणजेच फक्त दशांश चिन्ह एक घर डावीकडे सरकवा) व उत्तरास 3 ने तोंडी भागा.

उदा. 6840÷ 15 = (1) 13680 (2) 1368 (3) 456 (उत्तर)

75 ने भागायचे आहे ?

भाज्य संख्येची चौपट करायची.
दशांश चिन्ह 2 घरे डावीकडे घ्यायचे व उत्तरास 3 ने भागायचे.

उदा. 1575 ÷ 75 = (1) 6300 (2) 63 (3) 21 (उत्तर)

25 ने भागायचे आहे ?

भाज्य संख्येस 4 ने गुणायचे नि दशांश चिन्ह दोन घरे डावीकडे घ्यावयाचे.

उदा. 1496 ÷ 25 = (1) 5984 (2) 59.84 (उत्तर)

125 ने भागायचे आहे ?

भाज्य संख्येस 8 ने गुणा नि दशांश चिन्ह तीन घरे डावीकडे घ्या.

उदा. 1750 ÷ 125 = (1) 14000 (2) 14 (उत्तर)

375 ने भागावयाचे आहे ?

भाज्य संख्येस 8 ने गुणा व उत्तरास 3 ने भागा. येणाऱ्या उत्तरात दशांश चिन्ह तीन घरे डावीकडे घ्या.

उदा. 7125 ÷ 375 = (1) 57000 (2) 19000 (3) 19 (उत्तर)

625 ने भागायचे आहे ?

भाज्य संख्येस 16 ने गुणा. दशांश चिन्ह चार घरे डावीकडे घ्या.

उदा.17500 ÷ 625 = (1) 280000 (2) 28 (उत्तर)

एक सूत्रच यावरून तयार होईल.

भाजकाची कुठलीही पट (वाढती म्हणजे दुप्पट, तीप्पट, सोळापट, वगैरे किंवा उतरती, म्हणजे निमपट, पावपट, वगैरे) करून जर तोंडी भागता येण्याजोगी संख्या मिळत असेल तर तशी बनवून तिने प्रथम भागावे. व उत्तरास नेमक्या त्याच पटीने गुणावे.

6.5 ने भागायचे आहे ?

त्यात काय आहे ? 6.5 ची दुप्पट झाली 13.
13 चा पाढा येत असेल तर भाज्य संख्येला 13 ने तोंडी भागता येईल व उत्तराची दुप्पट करता येईल.

उदा. 1123 ÷ 6.5 = (1) 86.384 (2) 172.769

थोडक्यात, अंकांची जाण हवी. दर संख्येचे दुसऱ्या संख्येशी जे नाते आहे ते ओळखता यावयास हवे.

हे आले की भागाकार म्हणजे तुमच्या हातचा मळ राहील.

***

प्रकरण ३ रे

भागाकाराची स्तंभ पद्धत

भागाकाराची एक अतिशय जगावेगळी पद्धत कधी तुमच्या वाचनात आली आहे का ? या पद्धतीत भागाकाराचं गणित मांडतात तेच उभ्या दोन स्तंभांच्या स्वरूपात.

केवळ मांडणीच वेगळी असते असे नव्हे. भागाकाराची कृती देखील नेहमीच्या भागाकार कृतीपेक्षा पूर्णतया वेगळी असते.

आश्चर्य म्हणजे तरीही उत्तरे मात्र बरोबर निघतात.

ही देखील पौर्वात्यच पद्धत आहे असे मानले जाते.

या प्रकारच्या भागाकारांसाठी स्तंभ तयार करावे लागतात.

स्तंभ 1

यामध्ये एकाखाली एक खालील संख्या लिहून ठेवायच्या असतात.

स्तंभ - 1

1

2

4

8

16

वगैरे

लक्षात आलेच असेल की दर पुढचा आकडा आधीच्या आकड्याची

दुप्पट आहे.

स्तंभ 2

पहिल्या स्तंभातील दर आकड्यासमोर तुम्हास एकेक संख्या लिहावयाची आहे.

पहिला आकडा म्हणून तुम्ही सोडवीत असलेल्या भागाकाराच्या गणितापैकी जी भाजक संख्या असेल ती लिहा. उदाहरणार्थ, समजा, तुमचे गणित असे आहे :-

उदा. $89 \div 9 =$ किती ?

खालीलप्रमाणे स्तंभ **1** व **2** प्रथमतः तयार करावे.

स्तंभ - 1	**स्तंभ - 2**
1	9
2	
4	
8	
16	
32	
64	
128	

आता पुढचा टप्पा.

स्तंभ दोनमध्ये पहिल्या स्तंभातील दर आकड्यासमोर तुम्हास आकडा लिहावयाचा आहे. तेथे पहिला आकडा तुम्ही भाजक संख्या लिहून टाकली. आता पुढचा आकडा त्याचीच दुप्पट लिहा. तिसरा आकडा दुसऱ्या आकड्याची दुप्पट असेल. चौथा तिसऱ्याची, पाचवा चौथ्याची अशा दुप्पटी असतील.

हे किती मर्यादेपर्यंत लिहावयाचे ?

भाज्य संख्या बघा. तिच्याहून लहान पण तिच्या अगदी जवळची संख्या येईतो लिहित जायचे.

आता उदाहरणातील आकड्यांनी हे स्तंभ वरच्या सुचनांप्रमाणे भरू म्हणजे कल्पना डोक्यात सुस्पष्ट होईल.

उदा. 89 × 9 = किती ?

स्तंभ - 1	स्तंभ - 2
1	9
2	18
4	36
8	72
~~16~~	~~144~~

मांडत मांडत जेव्हा तुम्ही 72 पाशी आलात तेव्हाच 89 या भाज्य संख्येपेक्षा लहान व जवळात जवळ अशा संख्येपाशी आलेले आहात.

तेव्हा पुढच्या आकड्यांची आपल्याला गरजच नसल्याने दोन्ही स्तंभातल्या पुढच्या पायऱ्यांना काट मारून टाकू.

आता 72 ही संख्या बघा. या संख्येच्या रेषेत स्तंभ 1 मध्ये कुठली संख्या दिसतेय ? अर्थात 8.

89 ÷ 9 या गणिताचे भागफळ 8 हे उत्तर स्तंभ 1 मधल्या 8 ने दिले.

आता बाकी काढायची.

भाज्य संख्येतून स्तंभ 2 मधली संख्या वजा करा. स्थूलत: तीच बाकी समजायला हरकत नाही.

89 - 72 = 17

स्थूलत: म्हणायचे कारण काही काही वेळा ही बाकी भाजकापेक्षा जास्त येते.

अशा वेळी काय कराल ?

सोपी युक्ती !

बाकीतून भाजक किती वेळा वजा जाऊ शकेल तितके वेळा तो तसा वजा घालवा व खरी बाकी काढा.

बाकी	भाजक	वेळा	खरी बाकी
17	9	1	8

म्हणजे इथे 17 मधून जास्तीत जास्त एकच वेळा भाजक 9 वजा जाऊ शकतो.

तेव्हा भाग 8 एकने वाढवा.

उत्तर : भाग 9; **बाकी** 8

मोठमोठ्या संख्या घेतल्या तरी हे असेच घडेल ?

अर्थातच !

करूनच बघू या.

उदा. 1222 ÷ 35 = किती ?

आता शब्द टाळू नि वरची रीत वापरून गणितच मांडू :

स्तंभ -1	**स्तंभ - 2**
1	35
2	70
4	140
8	280
16	560
32	1120
~~64~~	~~2240~~

भाग = 32 हे तर कळले. आता बाकी किती ?

बाकी = 1222 - 1120 = 102

इथेही बाकी भाजक 35 पेक्षा मोठी आहे. 102 मधून 35 किती वेळा वजा जाऊ शकतात ?

दोन वेळा. मग भाग 32 दोनने वाढवा. बाकी किती निघेल ?

मूळ बाकी 102 - (35 × 2 = 70) = 32

उत्तर सांगून टाका. **भाग** 34; **बाकी** 32.

सराव उदा. 832 ÷ 51 = **किती ?**

1	51
2	102
4	204
8	408
16	816 (832 - 816 = 16)

उत्तर : भाग 16; बाकी 16

* * *

प्रकरण ४ थे

शंभरचे शेजारी

100 च्या अगदी जवळची संख्या 99. ही इतकी जवळ आहे की त्यामुळे कुठल्याही संख्येस 99 ने भागा असं कुणी म्हटलं की भागाकार करण्यासाठी नक्कीच एखादी फार सोपी रीत बसविता येईल याचा आपल्याला अंदाज येतो.

बघू अशी रीत बनवून.

कुठल्याही संख्येस 99 ने झटपट कसे भागावे ?

उदा. 1234567 ÷ 99 = ?

पायरी 1

123 ÷ 100 = 1/23. हे पाहिल्यावर ध्यानात येतं की भाज्य संख्येतील आकडेच कदाचित आपणास थोडाफार फरक करून भागाकार देतील व तोंडी उत्तरही (म्हणजे अंतिम भागफळ व बाकी) काढायला मदत करतील.

चला तर भागाकार मांडून घेऊ. भाज्यसंख्येचा दर अंक अंतर सोडून मांडायला विसरू नका.

```
99)1  2  3          4  5  6  7(
             2 3
            + 1
            ----
             2 4
  उत्तर      1........
```

काय काय केले ते नीट पाहा. भाज्यसंख्येचा पहिला अंक भाग म्हणून

मांडला. जो भाग दिला तो दुसऱ्या व तिसऱ्या अंकांनी बनलेल्या संख्येत मिळवला. (23 + 1 = 24). मनाने 23 च्या जागी 24 संख्या पाहिली. तीवर पुढचा अंक 4 ओढून घेतला. मनाने भाज्य संख्या 244 पाहिली.

पुढचा भाग म्हणजे या नवभाज्य संख्येचा पहिला अंक. म्हणजेच 2 मांडून टाका भागफळ मांडतात त्या जागी ! (पायरी 2 बघा.)

जी 44 संख्या राहते तिच्यात हे दोन मिळवून 46 संख्या मनाने पाहा. या 46 वर भाज्य संख्येतील पुढचा अंक 5 ओढून घ्या. नवभाज्य 465 झाले. तात्पर्य, पायरी 2 चे वर्णन पुढीलप्रमाणे होईल. आता वर्णन डावीकडे व गणित उजवीकडे मांडत जाऊ.

पायरी 2

आता 244 ÷ 100 = 2/44	99) 1 2 3 4 5 6 7 (
भाग उत्तरात. बाकीत भाग मिळवा.	24 46
(44 + 2 = 46). 46 पुढच्या अंकाचे	उत्तर 1 2 ....
तोंडाशी जोडा.	

पायरी 3

आता 465 ÷ 100 = 4/65 .	99) 1 2 3 4 5 6 7 (
उत्तरात 4. पुढच्या आकड्याला 69	24 46 69
(म्ह. 65 + 4)जोडा.	उत्तर 1 2 4 ....

पायरी 4

696 ÷ 100 = 6/96.	99) 1 2 3 4 5 6 7 (
उत्तरात 6. बाकी 96 + 6 = 102	24 46 69 102
जोडावयाची. परंतु येथे थांबा.	उत्तर 1 2 4 ~~6~~
102 हे भाजकापेक्षाही जास्त आले.	7 ....
102 मधून 99 वजा करून 3 फक्त	
पुढच्या आकड्यास जोडा. (37.)	
भाग 6 खोडून 7 लिहा.	

पायरी 5

37 ÷ 100 = 0/37.

येथे थांबा.

```
99 ) 1 2 3    4    5    6    7 (
              24   46   69  3
        1     2    4   -6-   0
                         7
```

पायरी 6

बाकी 37 + शेवटचा भाग 0 (= 37)

37 हीच बाकी.

अंतिम उत्तर - 12470 / 37

वरील रीत नीट वाचा. आता खालचे गणित तर तुम्हाला तोंडीच येईल.

उदा. 987654 ÷ 99 = ?

```
99 ) 987    6    5    4      (
           96   75   62   30
       9    9    7    6
```

उत्तर 9976/30

आता तत्त्व समजले तर ही पुढची उडीही घेता येईल.

कुठल्याही संख्येला 96, 94, 97 यांनी कसे भागावे ?

> 99 ने भागताना पहिल्या 3 अंकी खंडास 100 ने भागले. भाग अन् भाजकाचा शतपूरक (1) याचा गुणाकार बाकीत मिळवला. तेच इथे करा. भाज्य संख्येच्या पहिल्या 3 अंकी तुकड्याला 100 ने भागा व जो भाग जाईल त्याचा भाजकाच्या शतपूरकाशी गुणाकार करून येणारी संख्या बाकीत मिळवा व ही नवी बाकी पुढच्या आकड्याला जोडत याच पद्धतीने पुढे चला. शतपूरक म्हणजे शंभरमधून भाजक वजा करून राहणारी बाकी !

उदा. 1 2 3 4 5 6 7 8 ÷ 96 = ?

पायऱ्या

1) 123 ÷ 100 = 1/23.
   23 + (1 × 4) = 27.
2) 274 ÷ 100 = 2/74.
   74 + (2 × 4) = 82.
3) 825 ÷ 100 = 8/25.

```
96 ) 123    4    5    6    7    8 (
           27   82   57    0 7
      1     2        8    -5-  0
                           6
```

(भाजकाचा शतपूरक

25 + (8 × 4) = 57 . 　　　　100 - 96 = 4)

4) 576 ÷ 100 = 5/76.

76 + (5 × 4) = 96.

सूचना - पायरी क्र. 4 ला 576 ला 96 ने भागल्यावर 6/0 उत्तर येते म्हणून बाकीसाठी 0 घेतले आहेत.

बाकी 96 जोडू नका. कारण भाजकापेक्षा बाकी लहान आलेली नाही. भाजकाएवढीच बाकी आहे. तेव्हा भाग 1 ने वाढवा.

बाकी 0.

पुढच्या पायऱ्या

5) 07 ÷ 100 = 0/7.

7 + (0 × 4) = 7.

6) 78 ÷ 100 = 0/78.

78 + (0 × 4) = 78

उत्तर भाग 128600, बाकी 78

सराव

उदा. 30204050 ÷ 91 = किती ?

शतपूरक = 100 - 91 = 9

गणित मांडणी

	91) 3 0 2	0	4		0	5	0 (	
		29	17	83	11	24	58	
उत्तर	3	~~2~~	1	~~8~~	1	2		
		3		9				

स्पष्टीकरण पुढे पहा.

1) 302 ÷ 100 = 3/2

2 + (9 × 3) = 29

नक्की केलेला उत्तराचा अंक 　　　　3

नक्की केलेली बाकी 29.

2) 290 ÷ 100 = 2 / 90

90 + (9 × 2) = 108

108 भाजक 91 पेक्षा मोठे.

1 ने भाग वाढवला.

नवी बाकी 108 - 91 = 17

नक्की केलेला उत्तराचा अंक 3

3) 174 ÷ 100 = 1 / 74

74 + (9 × 1) = 83

नक्की केलेला उत्तराचा अंक 1

नक्की केलेली बाकी 83.

4) 830 ÷ 100 = 8 / 30

30 + (9 × 8) = 102

102 भाजक 91 पेक्षा मोठे.

1 ने भाग वाढवला.

नवी बाकी 102 - 91 = 11

नक्की केलेला उत्तराचा अंक 9

5) 115 ÷ 100 = 1 / 15

15 + (9 × 1) = 24

नक्की केलेला उत्तराचा अंक 1

नक्की केलेली बाकी 24

6) 240 ÷ 100 = 2 / 40

40 + (9 × 2) = 58

नक्की केलेला उत्तराचा अंक 2

नवी बाकी 58

गणित संपले.

उत्तर भाग 33 19 12 : **बाकी** 58

अधिक अभ्यास

1) 198979 ÷ 98 2) 9555401 ÷ 97

उत्तरे

1) 2030/39 2) 98509/28

जर 99 ने, 98 ने, वगैरे भागणे झटपट जमते तर 101 ने, 102, वगैरेने भागणेही झटपट जमणार हे उघड आहे. चला तर तीही रीत पाहू या.

100 पेक्षा थोड्याच अंकांनी जास्त अशा संख्येने कसे भागावे ?

उदा. 1234567 ला 101 ने आपल्याला भागावयाचे असेल तर ?

रीत

प्रथम भागाकार लिहून घेऊ.

```
101 ) 1 2 3 4 5 6 7
```

पायरी 1

123 ÷ 100 = 1/23. आता बाकीतून 1 वजा करावयाचा. (99 ने भागताना भाग जमा केला. येथे उलट करावयाचे, एवढेच.) 23 - 1 = 22. पुढच्या आकड्याच्या तोंडाशी डावीकडे जोडा.

```
      101 ) 1 2 3 4 5 6 7 (
                  22
           -------------
उत्तर             1
```

पायरी 2

224 ÷ 100 = 2/24. 24 मधून 2 वजा करा. 22 पुढच्या 5 च्या मागे जोडा.

```
101 )1 2 3    4      5 6 7 (
             22     22
      ----------------------
उत्तर   1      2
```

पायरी 3

225 ÷ 100 = 2/25

25 - 2 = 23

6 च्या मागे जोडा.

```
101 ) 1 2 3   4    5    6   7 (
             22   22   23
        ------------------------
उत्तर     1    2    2    2
```

पायरी 4

236 ÷ 100 = 2/36

36 - 2 = 34

7 च्या मागे जोडा.

```
101 ) 1 2 3   4    5    6   7 (
             22   22   23  34
        ------------------------
उत्तर  1   2   2    2    3
```

पायरी 5

347 ÷ 100 = 3/47

47 - 3 = 44. थांबा.

```
101 ) 1 2 3  4    5   6    7   (
             22   22  23   34  44
        ---------------------------
उत्तर   1       2    2   2   3
```

उत्तर : 12223 (भाग) 44 (बाकी)

वरील रीत नीट वाचा. खालचे गणित तोंडीच करा.

उदा - 10566501 ÷ 101 = 104618/83

आता तुम्हाला ही पुढची उडीही घेता येईल.

कुठल्याही संख्येस 102, 103, 105, 116 वगैरेंनी कसे भागावे ?

दरवेळी भाज्य संख्येच्या 1 ल्या 3 अंकी तुकड्याला 100 ने भागा व जो भाग जाईल तो उत्तरात लिहा. मग भाजक 100 पेक्षा जेवढ्याने जास्त असेल त्या **फरकाने** जो उत्तराचा अंक उर्फ भाग आला त्यास गुणा व तेवढा गुणाकार बाकीतून वजा करून बाकी पुढच्या अंकाच्या तोंडाशी डावीकडे जोडा. नव्या संख्येस पुनः 100 ने भागावयाचे. उत्तरात भाग लिहावयाचा. बाकीतून भाग × फरक वजा, असे पुढे पुढे करीत जायचे. **भाजक - 100 = फरक**

उदा. 45453201÷ 106

106) 4 5 4 5 3 2 0 1 (

30 93 85 4 40 83

उत्तर 4 ~~3~~ ~~9~~ 8 0 3

2 8

उत्तर 45453201÷ 106 = भाग 428803 बाकी 83

पायऱ्या -

1) **फरक** = 106 - 100 म्हणजेच 6.

454 ÷ 100 = 4/54. 54 - (6 × 4 = 24) = 30

2) 305 ÷ 100 = 3/5. 5 - 18 वजाबाकी होत नाही तेव्हा खालचा भाग द्या. 305 ÷ 100 = 2/105. 105 - 12 = 93

3) 933 ÷ 100 = 9/33; 33 - 54 = ? खालचा भाग द्या.

933 ÷ 100 = 8/133; 133 - 48 = 85

4) 852 ÷ 100 = 8/52; 52 - 48 = 4

5) 40 ÷ 100 = 0/40; 40 - 0 = 40

6) 401 ÷ 100 = 3/101;

101 - 18 = 83 . **येथे थांबा.**

(वर चार भाग व एक बाकी काढली असती तर बाकी एकमधून 24 वजा **गेले नसते. म्हणून** 4 ऐवजी खालचा 3 चा भाग दिला.)

उत्तर 428803 बाकी 83

सराव -

उदा. 1233333 ÷ 105 = ?

105) 1 2 3	3		3	3	3	(	
	18	78		48	63	3	
उत्तर 1	1	7		4	6		

(उत्तर 11746/3)

अधिक अभ्यास -

1) 154466 ÷ 102 2) 20166495 ÷ 111

उत्तरे -

1) 1514 बाकी 38 2) 181680 बाकी 15

***

प्रकरण ५ वे

भाजकाचे चिन्ह ऋण करून भागाकार

(प्रास्ताविक : 'वैदिक गणित' निर्मात्या ब्रह्मलीन श्री भारतीकृष्णातीर्थजी महाराज श्रीमत् शंकराचार्य, गोवर्धनपीठ, पुरी यांनी भागाकाराच्या पुढील पाच पद्धती वेदांतून शोधून काढल्या. त्या पद्धती येथे जास्त विकसित व सुलभ करून मांडल्या आहेत.)

पाठ 1

'अलीबाबा आणि 40 चोर' या सुरस कथेत **'तिळा उघड'** असा मंत्र म्हणताच रत्ने माणकांनी भरलेली चोरांची गुप्त गुहा आपसूक उघडत असे, हे सर्वांनी वाचले आहे.

द्रुत भागाकारासाठी असेच 'तिळा उघड' सारखे परवलीचे शब्द आहेत. ('परावर्त्य', 'निखिलं', 'अनुरूप्येण', 'उर्ध्वतिर्यग्भ्याम्'.) हे शब्द वा ही सूत्रे ज्याला अवगत झाली त्याला शीघ्र भागाकाराची एक गुरुकिल्लीच प्राप्त होते.

भाजकाची केवळ चिन्हे बदलली की गणिते कशी सोपी होऊन जातात हे या ठिकाणी आपण शिकणार आहोत.

'चिन्हे बदलणे' म्हणजे संख्यातील अंक आहे तोच कायम राखायचा, फक्त त्याचे चिन्ह बदलायचे. म्हणजे अधिक अंक असेल तेथे तो उणे आहे असे समजायचे. तर उणे अंक असेल तेथे तो अधिक आहे असे समजायचे !

चिन्ह बदल पद्धतीच्या वापराचे मोजकेच, आकर्षक नमुने आपण येथे पाहाणार आहोत.

चिन्हे कशासाठी बदलायची ?

खरे तर चिन्ह बदलाने साऱ्याच गणित क्रियांना सुलभता येऊ शकते, मग तो गुणाकार असो वा अन्य काही क्रिया असो. जेथे एरवी गुणतो तेथे भागता येते. भागतो तेथे गुणता येते. + चे - होते नि - चे + होते. चिन्ह शक्तीचा येथे केवळ एकच नमुना, **भागाकार**, पेश करीत आहे.

केवळ चिन्ह बदलल्याने घडणारे चमत्कार

शंभर, हजार, दहा हजार...... अशा 1 नि शून्ये यांनी बनलेल्या संख्यांना 10चे घात म्हणू. अशा 10च्या कुठल्याही घाताच्या अगदी जवळच्या पण त्याहून थोड्याशाच अंकांनी जास्त असलेल्या भाजक संख्यांनी दुसऱ्या संख्येस भागायचे झाल्यास केवळ चिन्हे बदलून भागाकार कसा झटकन जमतो ते प्रथम पाहा.

उदा. 1254 ला 114 ने भागा.

प्राथमिक मांडणी

	डावी बाजू		उजवी बाजू
$\bar{1}\bar{4}$)	1 2	.	5 4 (

भाजक संख्या मांडताना तिच्या डाव्या टोकाचा अंक (1) नाहीच आहे असे समजा. पुढचे अंक तेवढे लिहून घ्या. ह्याचे नाव **नवभाजक**. हे अंक मुळात धन अंक आहेत. ते आता ऋण अंक आहेत असे समजावयाचे. त्यासाठी वर दाखविली तशी त्यांचे डोक्यावर उणे चिन्हे लिहा.

भाज्य संख्या मांडताना वरील नवभाजकात उदाहरणार्थ $\bar{1}\ \bar{4}$ मध्ये जेवढे अंक असतील तेवढेच म्हणजे दोन अंक उजवीकडे घेऊ. बाकी सारे डावीकडे घ्यायचे. दोन विभागात जागा सोडायची. शेवटी, डाव्या बाजूस 'भाग' मिळेल नि उजव्या बाजूस 'बाकी' मिळेल.

दहा किंवा दहाच्या घाताच्या जवळच्या संख्येने इतर मोठमोठ्या संख्यांना झटपट भागण्याची द्रुत-रीत.

उदाहरणार्थ : 1254 ÷ 114

16696 ÷ 1102

1174 ÷ 130

1235 ÷ 160 वगैरे

भाजकातील राहिलेल्या अंकांचे चिन्ह उणे करताच भागाकार इतका सोपा होईल की विचारायची सोय नाही. रीत सांगत न बसता **वरची मांडणी** वापरून गणिते सोडवता सोडवताच रीत शिका. मंत्राचे शब्द -'परावर्त्य योजयेत्'

उदा. 1254 ला 114 ने भागा

पायरी 1

(प्राथमिक मांडणी करून घेतली)

भाजक 114 पैकी 1 मोडला तर नवभाजकात राहिले दोन अंक.

आता भाज्य संख्या (1254) पाहा. पैकी **दोन** अंक आपण डावीकडे व उरलेले अंक उजवीकडे अलग अलग लिहून मध्यावर एक स्तंभ (रिकामा) तयार केला आहे.

$\bar{1}$ $\bar{4}$) 1	2		5	4	(

भाज्यातले अंक अलग अलग का मांडले ?

कारण त्यांच्या खाली मांडायचे गुणाकार कधी कधी जर दोन अंकी आले तर तो पुरा गुणाकार वरच्याच अंकाच्या मालकीचा आहे हे दाखवण्यासाठी एका अंकाखाली दोनअंकी संख्या मांडावी लागेल. त्यासाठी जागा व्हावी म्हणून ते अलग मांडावयाचे असतात.

पायरी 2

भाज्य संख्येच्या डावीकडून पहिल्या अंकाने नवभाजकाच्या दर अंकास **अंकशः** गुणून तो, तो गुणाकार भाज्य संख्येच्या **दुसऱ्या** अन् **तिसऱ्या** अंकाखाली अनुक्रमे लिहावयाचा. वरच्या व खालच्या अंकांची बेरीज घ्या. बेरीज = नवभाज्य.

$\bar{1}$ $\bar{4}$)	12		5	4 (
+	$\bar{1}$		$\bar{4}$	
	11		1	4

दर अंकाचा जणु वेगळा स्तंभ आपण मानला. तसेच, त्या त्या अंकाचे चिन्ह काय आहे ते लक्षात घेऊन त्या, त्या स्तंभातल्या अंकांची बेरीज मांडली.

पायरी 3

बेरजेसाठी आडव्या मारलेल्या रेघेखालचा 11 14 आकडा बघा.

1114 हे नवभाज्य समजा. याच्यातला डावीकडून दुसरा अंक घेऊन = 1 त्याने आता नवभाजकास (आधी गुणले तसे) अंकशः गुणायचे. दर गुणाकार अनुक्रमे तिसऱ्या चौथ्या अंकासखाली मांडावयाचा व बेरीज घ्यायची.

$\bar{1}\ \bar{4}$)	1 2		5 4 (
+	$\bar{1}$		$\bar{4}$
नवभाज्य	1 1		1 4
+			$\bar{1}\ \bar{4}$
	1 1		0 0

आपण भाज्य संख्येचे डावी बाजू व उजवी बाजू असे दोन भाग केले आहेत. डाव्या बाजूच्या नवभाज्याच्या अंकांपैकी प्रत्येक अंकाने **अंकशः** भाजकाच्या दर अंकास (चिन्हे लक्षात घेऊन) गुणून झाले की समजू की भागाकार-गणित संपले. नियम आठवा. डाव्या बाजूस **'भाग'** मिळेल व उजव्या बाजूस बाकी मिळेल. म्हणून

उत्तर : भाग 11; बाकी काही नाही.

दुसऱ्या एका कागदावर 1254 ला 114 ने तुम्ही शाळेत शिकलात त्याच पद्धतीने भागून तो भागाकार व हा भागाकार यात खर्चलेल्या वेळाची नि कष्टाची तुलना करून पाहिल्यास ही नवी युक्ती 'किती सरस व किती सोपी' असे वाटेल.

वर म्हटले होते, 'चिन्हे बदलून गणिते केली की जेथे वजाबाकी करायची तेथे उलट म्हणजे बेरीज करून भागते.'

तसेच झाले ना ?

तुमच्या शाळेत शिकलेल्या रीतीत भागाकार करताना मांडणीत ज्या जागी उणे चिन्ह मांडत आलात त्याच जागी या अभिनव रीतीत अधिक चिन्हे आपण मांडली. चक्क बेरीज केली. तरीही उत्तर बरोबरच आले.

कशी काय आहे मजा ?

तुम्हाला ही गंमत दाखवावी व नवीं रीत नीट कळावी म्हणून सुरवातीला ते साधेसुधे, सरळ गणित निवडले होते. आता मुद्दाम जरा वेगळे गणित करावयास घेऊ.

आपण बेरीज दर स्तंभाची म्हणजे अंकाखाली अंक असा एकेक स्तंभ

मानून, शिवाय त्या अंकाचे चिन्ह काय आहे, अधिक वा उणे, ते विचारात घेऊन केली.

समजा, त्यामुळे शेवटच्या म्हणजे उत्तर देणाऱ्या ओळीत एखादा अंक उणे चिन्ह दाखवणारा मिळाला तर काय करायचं ?

वरच्या गणितात 11 पैकी दोन्ही 1 हे अधिक आहेत. त्यात एकही उणे 1 नाही.

पण एखादा (वा दोन्हीही) 1 उणे येऊ शकले असते. एक वेगळे गणित घेऊ. त्यात असे उणे अंक येतील.

अशा वेळी अंतिम उत्तराकडे (ज्यात उणे अंक चालतच नाहीत !) जायला जादा काय करायचं ?

चला, तेही शिकू.

बाकी किंवा भाग यात ऋण अंक आले तर

त्या ऋण अंकाचे धन अंकात रुपांतर करणे एवढीच पायरी गणितात वाढेल.

पाठ 2

प्रथम ऋण अंकाचे धन अंकात रूपांतर करण्याची पद्धत माहिती करून घ्यावी लागेल.

धडा पहिला

उणे अंक किंवा उणे संख्या कशी लिहावी ? अंकावर आडवी रेघ मारा. (- 27 न लिहिता $\bar{2}\bar{7}$ लिहावयाचे). लक्षात ठेवा - जेव्हा आपण - 27 म्हणतो तेव्हा नुसताच दहं उणे नसतो तर एकंही उणेच असतो. - 27 म्हणजे $\bar{2}\bar{0}$ व $\bar{7}$ यांचे एकीकरण असते. $\bar{2}\bar{7}$ या संख्येत 2 उणे आहे व 7 ही उणे आहे. त्यामुळे संख्येच्या दर अंकावर आडवी रेघ मारणे हे संख्येच्या पुढ्यात उणे चिन्ह मांडण्यापेक्षा निश्चितच जास्त शास्त्रशुद्ध आहे. ही एक संख्या लेखनाची वेगळीच पद्धत आहे.

या पद्धतीचा विशेष म्हणजे एकाच वेळी एखाद्या संख्येत तुम्हाला एखादा अंक उणे तर एखादा अंक अधिक दाखवता येईल. त्यामुळे त्या संख्येची दर्शनी किंमत बदलता येईल. उदाहणार्थ 27 ही संख्या घ्या. तिची दर्शनी किंमत

27 आहे. पण तोच आकडा $\bar{2}7$ किंवा $2\bar{7}$ असा मांडा बघू. **ताबडतोब याच** 27 ची किंमत अनुक्रमे उणे 13 वा अधिक 13 होईल.

27 = + 20 + 7 = अधिक 27

$\bar{2}\bar{7}$ = (- 20) + (- 7) = उणे 27

$\bar{2}7$ = (-20) + (+ 7) = उणे 13

$2\bar{7}$ = (+ 20) + (- 7) = अधिक 13

उदा. $\bar{2}4\bar{7}$ या संख्येची किंमत काय ?

उत्तर - 200 + 40 - 7 = उणे 167

धडा दुसरा

एखादा अंक वा संख्या कुठल्याच चिन्हांशिवाय असेल तर तो अंक वा ती संख्या अधिक आहे असे समजावयाचे. उदाहरणार्थ + 2 वा + 19 न म्हणता नुसते 2, 19 लिहिले तर ते अधिक अंक वा संख्या आहेत असे गृहित धरावे.

धडा तिसरा

एखादी अख्खी संख्या उणे उर्फ ऋण संख्या असते तेव्हा आजपर्यंत आपण त्या संख्येपुढे डाव्या बाजूला एकदाच उणे चिन्ह देऊन काम भागवीत होतो. खाली काही तसे आकडे नव्या रीतीत कसे मांडू ते पाहू.

	जुनी रीत	नवी रीत
1)	- 44	$\bar{4}\ \bar{4}$
2)	- 12345	$\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{5}$
3)	- 27	$\bar{2}\bar{7}$

तात्पर्य,

उणे चिन्ह अंक अथवा संख्येच्या सुरुवातीला न लिहिता अंकांच्या डोक्यावर लिहावयाचे. उदाहरणार्थ -2 न लिहिता $\bar{2}$ लिहावयाची सवय करावी.

आता शिकू या की बाकी अथवा भागफळ म्हणून जे उत्तर मिळेल त्यातच **एखादा अंक उणे आलेला असेल तर त्याचे रुपांतर धन अंकात करून घ्यायचे.**

त्यासाठी एक युक्ती आहे. उणे चिन्ह देऊन एक नवा अंक (1) मूळ उणे अंकाच्या मागे जोडणे व मूळ अंकाच्या जागी मूळ अंक (त्याचे चिन्ह

विसरून) दहातून वजा केल्यावर जी बाकी उरते ती धन अंक म्हणून लिहिणे.

उदाहणार्थ

समजा $\bar{6}$ ह्या अंकाऐवजी तुम्हास धन अंक हवा आहे.

नियम 1 : उणे चिन्ह देऊन 1 डावीकडे जोडा $\bar{1}\ \bar{6}$

नियम 2 : मूळ अंक (6) त्याच्या डोक्यावरची
आडवी रेघ विसरून विचारात घ्यायचा.
हा 6 दहातून वजा करून बाकी 4 मिळवा.
हा बाकीचा अंक मूळ अंकाच्या जागी
धन अंक म्हणून लिहून टाका. $\bar{1}\ 4$

बघा उणे सहाच्या जागी अधिक 4 आपल्याला ह्या 'ऋण अंकाचे धन अंकात रुपांतर करणे' या क्रियेतून मिळाला. $\bar{1}4$ या संख्येची किंमत मात्र $\bar{6}$ च राहिली.

तुम्ही विचाराल की उणेपणा अदृश्य कुठे झाला ? फक्त तो डावीकडे निर्माण झाला ! खरे आहे.

बाकी दाखवणाऱ्या संख्येतील उणे अंक अदृश्य करणे.

'मांडणी' परिच्छेदात लिहिलेले परत आठवा. तेथे म्हटले आहे की 'डावी बाजू' या विभागात भागफळ मिळेल व उजवी बाजू या विभागात बाकी मिळेल. तेव्हा प्रथम अंतिम बाकी बघायची. त्यातला एकेक अंक धन करून घ्यायचा. मग शेवटी तुमच्या हाती उणे एक (ह्या क्रियेमुळे) हातचा आलेला राहील.

उत्तराच्या डाव्या भागातून 1 वजा केल्याने हा उणे 1 अदृश्य होईल.

पाठ 3

'द्रुतरीतीने भागाकार संपल्यावर भागफळ व अंतिम बाकी तर आली; पण बाकीच्या विभागात (उजव्या बाजूत) उणे अंक आला' असं प्रत्यक्ष घडणारं हे बघा खालचं गणित ! वर दिलेल्या पद्धतीने तो उणे अंक आपण हळूहळू परिवर्तन करीत नाहीसा कसा करू शकतो ते प्रत्यक्षच दिसेल.

उदा. 16696 ला 1102 ने भागा

आता वर एक उदाहरण सोडवून झाल्यामुळे कमी शब्दात कृती व्यक्त करू.

पायरी 1

अ) मूळ भाजक 1102; नवभाजक $\bar{1}\ 0\ \bar{2}$

येथे एक नवे तत्त्व शिकू. शून्याला उणे चिन्ह देणे जरूर नाही. जेथे जेथे उणे शून्य मांडायला लागेल तेथे नुसत शून्य (0) मांडूनही भागेल. शून्यास ऋणत्व किंवा अधिकत्व यापैकी काहीच कधी चिकटत नाही.

नवभाजक = $\bar{1}0\bar{2}$

ब) मूळ भाज्य 16696 पैकी फक्त तीन अंक उजवीकडे वेगळे पाडून लिहू या. सारे अंक अलग अलग लिहू. मध्ये एक कोरा स्तंभ हातच्यासाठी सोडू.

क) नवी गणित मांडणी करून घ्यायची.

$\bar{1}0\bar{2}$)	1	6		6	9	6 (
	+	$\bar{1}$		0	$\bar{2}$	
	1	5		6	7	6

ड) वरच्या मांडणीत भागाकाराच्या कृतीचा पहिला टप्पा पुरा करून मांडून टाकला आहे. 16 मधल्या 1 ने $\bar{1}$ 0 $\bar{2}$ ला अंकशः गुणायचे अन् येणारे गुणाकार अनुक्रमे 2ऱ्या, 3ऱ्या, 4थ्या (म्हणजे 16 तील 6 खाली, 696 मधील पहिल्या 6 खाली व 696 तील 9 खाली लिहायचे.) असेच वरच्या मांडणीत लिहून दाखविले आहे ते बघा. मांडून झाल्यावर बेरीजही केली व नवभाज्यही मिळवले.

पायरी 2

नवभाज्य 15676 पैकी दुसरा अंक 5 ने $\bar{1}$ 0 $\bar{2}$ ला अंकशः गुणू. हे गुणाकार तिसऱ्या, चौथ्या नि पाचव्या अंकाखाली लिहू.

इथे हे गुणाकार एक अंकी न येता दोन अंकी येतील. या दोन अंकी संख्या जणू एक अंकच आहे असे कल्पा व योग्य जागी लिहा. बघा. $\bar{2} \times 5 = \bar{1}\,\bar{0}$ म्हणजे दोन अंकी गुणाकार 6 खाली मांडावा लागेल.)

उभी बेरीज अंकशः कशी घ्यायची ही गोष्ट पूर्ण ध्यानात आली ना ? आता दर अंकाचा वेगळा स्तंभ समजावा हा नियम विसरणार नाही. गुणाकार दोन अंकी आले तरी ते वरच्या एकेरी अंकाखालीच मांडायचे हा नियम तुमच्या मनावर बिंबला का ?

$\bar{1}0\bar{2}$)16		6	9	6(
+ $\bar{1}$		0	$\bar{2}$	
15		6	7	6
+		$\bar{5}$	0	$\overline{10}$
15		1	7	$\bar{4}$

पायरी 3

उजवी बाजू ही बाकीची बाजू आहे. तीमधे 1 7 $\bar{4}$ ही संख्या आली आहे. या संख्येत उणे चार असल्यामुळे त्या ऋण अंकाचे धन अंकात रुपांतर करणे ही आता पुढची पायरी.

आपल्या रीतीप्रमाणे

$\bar{4} = \bar{1}6$

तेव्हा 17$\bar{4}$ या आकड्यात $\bar{4}$ जागी अधिक 6 लिहून व डावीकडे जन्म पावलेला उणे 1 हा अंक 17$\bar{4}$ च्या सातमधून वजा करून सबंध आकडा 166 मिळेल.

थोडक्यात, ऋण अंक बाकीतून आपण पिटाळून लावल्याने आता आपल्याला स्वच्छ धन अंकांची बाकी मिळाली. नवे उत्तर आले :-

डावी बाजू	उजवी बाजू
15	166
(भागफळ)	(बाकी)

पुनरुक्ती करून सर्वसाधारण नियम बसवू या :

गणितात कोठेही ऋण अंक आला की त्याचा धन अंक तर करून घ्यायलाच हवा. ऋण अंक दहातून वजा केला की धन अंक मिळेल. डावीकडे उणे 1 जोडला म्हणजे मूळ किंमतीतही फरक पडणार नाही. डावीकडे उणे 1 जोडला तो आता नाहीसा कसा कराल ? जो ऋण 1 डावीकडे जोडायचा तोच, डावीकडे जो धन अंक असेल त्यात विसर्जित केला की झाले !

उदाहरणार्थ 7$\bar{4}$ मधील उणे 4 काढून टाकायचा झाला तर 4 च्या जागी 6 मांडायचा नि उणे एक डावीकडच्या अंकात मिळवून **सातचे सहा** करायचे. आता संपूर्ण गणित कसे दिसेल ते पुनश्च बघू या.

$\bar{1}0\bar{2}$)		1 6	6 9 6
	+	$\bar{1}$	0 $\bar{2}$
		1 5	6 7 6
			$\bar{5}$ 0 $\bar{1}\bar{0}$
		1 5	1 7 $\bar{4}$
		1 5	1 6 6

उत्तर 16696 ÷ 1102 = भाग 15 बाकी 166

> लक्षात ठेवा - गणितात कुठे **भागात** वा **बाकीत**, उणे अंक आले तर ते अंती अधिक करून घेतल्याशिवाय अंतिम उत्तर आले असे समजू नये.

पाठ 4

बाकी मूळ भाजकापेक्षा मोठी आली तर ?

दोन उदाहरणे घेऊन ह्यावेळी काय करायचे ते दाखवीत आहे.

उदाहरण 1

1174 ÷ 130 = ?

130 पैकी 30 फक्त लक्षात घेतला, त्यातला दर अंक उणे केला ($\bar{3}\,\bar{0}$); शून्याला ऋणत्व नसते व अधिकत्वही नसते म्हणून शून्यावरच्या डोक्यावरचे उणे चिन्ह पुसून द्रुतभाजक बनवला ($\bar{3}$ 0); या द्रुत-भाजकात दोन अंक म्हणून भाज्य संख्येची उजवी बाजू दोन अंकांची व डावी बाजू उरलेल्या अंकांची असे ठरवले आणि मग भागाकाराचे हे अभिनव गणित असे मांडून घेतले :-

(भाज्य संख्येचा दर अंक एकमेकापासून दूर दूर लिहिलाय हे लक्षात घ्या.)

	$\bar{3}0$)	1 1	7 4 (
$\bar{3}0 \times 1$	+	$\bar{3}$	0
		1 $\bar{2}$	7 4
$\bar{3}0 \times \bar{2}$	+		6 0
		1 $\bar{2}$	13 4
ऋण अंक नाहीसा केला.		8	13 4

भागाकार खरे तर येथे संपला. (कारण डाव्या बाजूत 2 अंक होते. म्हणजेच 2 स्तंभ होते. दोन्ही स्तंभातील बेरजेनंतर आलेल्या प्रत्येक अंकाने भाजक $\bar{3}0$ ला गुणून झाले आहे.)

उजवी बाजू बाकीची आहे. तेथे मिळालेला 134 हा आकडा मूळ भाजक 130 पेक्षा जास्त आला. पण 1174 ÷ 130 चे उत्तर भागफळ 8 व बाकी 134 कसे मांडू शकू ? येथे बाकी 134, तर गणितातला भाजकच आहे 130 !

अशा वेळी एक भाग जादा द्या. म्हणजेच बाकीतून (134 मधून) 130 एकदा वजा जातो म्हणून तो तसा वजा करून बाकी 4 ठरवा व खरा भाग 8 ऐवजी 9 म्हणा.

उत्तर भाग 9, बाकी 4

उदाहरण 2

1235 ÷ 160 = ?

पायरी 1

शून्यास उणे चिन्ह देणे आवश्यक नाही.

दोन अंकी गुणाकार आला तरी तो 3 चेच खाली घेतला.

नवभाजक = $\bar{6}0$

$\bar{6}0)$ 12		3	5	
$\bar{6}$		०		पायरी 1
1$\bar{4}$		3	5	
		24	0	पायरी 2
1 $\bar{4}$		27	5	
6		27	5	पायरी 3

पायरी 2

बाकी 275 म्हणजे भाजक 160 पेक्षा मोठी आली. पारंपारिक पद्धतीने गणित दुरुस्त केले. म्हणजे बाकीतून भाजक एक वेळ वजा केला व अंतिम बाकी काढली; तसेच भाग तितक्यानेच म्हणजे एकने वाढविला.

	6	275
+	1	- 160
	7	115

उत्तर - **भाग** 7 **बाकी** 115

वाटतंय का काहीतरी खूप नवं नि खूप सोपं असं भागाकार विषयात आज शिकतो आहोत असं ?

ऋण अंक पिटाळावयाची आणखी थोडी सवय आवश्यक आहे. भरपूर उणे अंक मिळतील असे एक गणित शोधू या.

$13456 \div 1123 = ?$

इथपर्यंतचा भाग कळला की नाही हे तपासून पाहण्यासाठी खालील प्रश्न व उत्तरे वाचा.

प्रश्न	उत्तर
1) 1123 भाजकाचे चिन्हे बदलून संक्षिप्त रूप काय कराल ?	$\bar{1}\bar{2}\bar{3}$
2) भाज्य संख्येचे किती अंक उजव्या बाजूत हवे ?	केवळ तीन
3) भाज्य संख्येच्या उजव्या बाजूत कोणकोणते अंक येतील ?	4 5 6
4) भाज्य संख्येच्या डाव्या बाजूत कोणकोणते अंक येतील ?	1 3

आता गणित सोडवावयास घ्यायचे. दर उणे अंकाचे धन अंकात रुपांतर करीत कसे उत्तराकडे आपण वेगाने जातोय ते पाहा.

उदा. - $13456 \div 1123 = ?$

उजवीकडच्या गणितात भाग 12 नि बाकी $0\bar{2}0$ आली आहे तेथे थांबा. अंतिम उत्तर देण्यापूर्वी बाकीतील उणे चिन्ह काढून टाकावे लागेल. परिवर्तनाचे नियम परत आठवा. उणे चिन्ह काढण्यासाठी गणित पुढे चालू ठेवले आहे. उजवीकडचा भाग उणे चिन्ह विरहीत करताना उजवीकडे 3 पेक्षा एक अंक जादा आला. तो मधल्या स्तंभात लिहून डाव्या भागाप्रमाणे त्याची दखल घेतली आहे. म्हणजे आता उणे एकनेसुद्धा नवभाजकास गुणले. 980 मध्ये परत 123 मिळवले. (भाजक $\bar{1}\bar{2}\bar{3} \times$ मधल्या स्तंभातला $\bar{1}$)

$\bar{1}\bar{2}\bar{3})$	1 3		4 5 6(
	$\bar{1}$		$\bar{2}\bar{3}$
	1 2		2 2 6
			$\bar{2}\bar{4}\bar{6}$
	1 2		$0\bar{2}\bar{0}$
थांबा	1 2		$0\bar{2}0$
	1 2		$\bar{1}80$
	1 2	$+\bar{1}$	9 8 0
	1 2	$+\bar{1}$	9 8 0
			1 2 3
	1 1		1 1 0 3

उत्तर **भाग** 11; **बाकी** 1103

बाकीचे सारेच अंक उणे आले तर ?

दर अंकाचे परिवर्तन करीत बसण्याची जरूरी नाही. भागातून 1 कमी करायचा

नि बाकी मूळ भाजकातून वजा करायची.

अशी ही पाहा दोन उदाहरणे -

उदा. 1340 ÷ 113

$\bar{1}\,\bar{3}$)	13	40
	$\bar{1}$	$\bar{3}$
	12	10
		$\bar{2}\,\bar{6}$
	12	$\bar{1}\,\bar{6}$
(मू. भा.)		113
	−1	−16
	11	97

उत्तर 11/97

उदा. 11111 ÷ 1012

$0\bar{1}\,\bar{2}$)	11	111
	0	$\bar{1}\,\bar{2}$
	11	$0\bar{1}1$
		$0\bar{1}\,\bar{2}$
	11	$0\bar{2}\,\bar{1}$
(मू. भा.)		1012
	−1	−21
	10	991

उत्तर 10/991

सराव

उदा. 15792 ÷ 1105 = ?

$\bar{1}0\bar{5}$)	1 5	7 9 2
+	$\bar{1}$	$0\ \bar{5}$
	1 4	7 4 2
+		$\bar{4}\ 0\ \bar{2}\bar{0}$
	1 4	$3\ 4\ \bar{1}8$
उणे अंकांचे धन अंकात	1 4	$3\ 4\ \bar{2}2$
आपण रूपांतर करीत जाणार.	1 4	3 2 2

उत्तर 14/322

उजवीकडे बाकी - विभागात, समजा, दोन अंकी संख्याच तुम्हास हवी होती. कारण नवभाजक दोनच अंकी होता. पण एकं स्थान प्रत्यक्षात दोन अंकी संख्या आली. तिची दोन अंकी संख्या कशी करून घ्याल ?

त्या संख्येचे एकं स्थान अबाधित राहिल. दहं स्थान शतं स्थानच्या अंकात मिसळून टाकायचे. म्हणजे जमा करावयाचे. **बघा :-**

उदा. 12127 ÷ 124 = ?

$\bar{2}\ \bar{4}$)		1	2	1	2	7
	+		$\bar{2}$	$\bar{4}$		
		1	0	$\bar{3}$	2	7
	+			0	0	
		1	0	$\bar{3}$	2	7
	+				6	12
		1	0	$\bar{3}$	8	19
		1	0	$\bar{3}$	9	9
		1	$\bar{1}$	7	9	9
		0	9	7	9	9

उत्तर 97/99

पाठ - 5

ही भागाकाराची खरोखरच अद्‌भुत पद्धत आहे. जेव्हा भाजक व भाज्य संख्या दहा किंवा दहाच्या एखाद्या घाताच्या जवळच्या अन् त्या घातापेक्षा किंचित फरकाने मोठ्या असतात तेव्हा ही रीत लागू करायची आहे.

वरच्या सर्व उदाहरणातल्या भाजक संख्या मोठ्या आहेत. याचा अर्थ नेहमीच्या पद्धतीने भागफळ म्हणून तुम्ही एखादा अंक निवडल्यावर त्या अंकाने संपूर्ण भाजकातील सर्व अंकांना दर वेळी दर पायरीवर गुणून भाग बरोबर बसतोय ना हे पहाणे जरूर झाले असते. या नव्या पद्धतीत भाजक संख्याच तिचा पहिला अंक आपण रद्द केल्याने छोटी होऊन गेली. तसेच, भागाकार म्हणजे वजाबाकी. वजाबाकी बेरजेच्या मनाने अवघड ! या नव्या पद्धतीत सर्वत्र बेरजाच आहेत. वजाबाकीच नाही. म्हणजेच गणितकृती जादा सोप्या झाल्या.

अन् गुणावं लागतं तेही एका अंकाने दुसऱ्या अंकास. पुनश्च तो गुणाकार एकाच अंकाखाली पूर्ण मांडून हातचे वगैरे घेण्याची जरूरच पडणार नाही अशीही सोय या पद्धतीत आहे. दर अंकाचा उभा स्तंभ म्हणजे तुमचं एकेक छोटं गणित !

कमीत कमी पायऱ्या, हाताळावयास छोट्यात छोटे अंक न् झटकन् उत्तर अशी ही भागाकाराची शीघ्र रीत आहे.

भाजकाचा पहिला अंक वरच्या सर्व गणितात 1 च होता.

त्यामुळे शीघ्रतेने भागाकार करताना आपल्याला कुठेही अपूर्णांक आड आले नाहीत. पण आले तरी बिघडणार नाही. तसेच रीतही वेगळी वापरावी लागणार नाही. फक्त सर्व भागाकार संपल्यावर संपूर्ण उत्तरास आपणास 1 ऐवजी भाजकाचा पहिला अंक म्हणून जो काही अन्य अंक असेल त्याने परत भागावे लागेल. तेच आता शिकू या.

आता भाजक संख्येचा पहिला अंक 1 न ठेवता बदलून अन्य ठेवू. रीतीत सूक्ष्म बदल होतील. आमूलाग्र नाही.

आपल्याला 10 च्या कुठल्याही घातापेक्षा थोड्याच अंकांनी मोठ्या पण घाताच्या अगदी जवळच्या संख्यांनी आता छान भागता येऊ लागले आहे. जसे मागचे उदाहरण होते 12127 ÷ 124. पण भाजकाचा पहिला अंक 1 ऐवजी 2 आला तर ? 234567 ÷ 232 असे एखादे गणित मिळाले तर ? अपूर्णांक तयार होणार नाहीत असं हे एक सोपं गणित सुरुवातीला घेऊन कल्पना थोडी अधिक स्पष्ट समजावून घेऊ. उदा. 234567 ÷ 232 = ?

रीत

प्रत्यक्ष उदाहरणाच्या संदर्भात ही भागाकार क्रिया स्पष्ट करणे सोपे ! 232 मधला डावीकडून पहिला 2 काढून टाका. 32 च्या दर अंकावर उणे चिन्ह द्या. ($\bar{3}\ \bar{2}$) हा झाला संक्षिप्त भाजक. आता याच्या दर अंकाच्या छेदस्थानी मघा काढून टाकलेला अंक मांडा. $\left(-\frac{3}{2}\ ;\ -\ \frac{2}{2}\right)$. ह्याला नवभाजक म्हणण्याऐवजी उपभाजक नाव देऊ. डावीकडच्या विभागातील प्रत्येक अंकाने उपभाजकाच्या प्रत्येक अंकाला गुणत गुणत सरळ भाग व बाकी येईल. इथपर्यंत मागील प्रमाणेच करीत राहायचे. इथून पुढे मात्र ज्यादा कृती करायची.

बाकीकडे लक्ष देऊ नका. फक्त 'भाग' बघा. भागाला मूळ भाजकाच्या पहिल्या अंकाने (म्हणजे 232 मधील 2 ने) भागले की खरे भागफळ मिळेल. तो भाग व आधीची बाकी हे अंतिम उत्तर होय.

पायरी 1

232 मधला 2 सोडला. 3 व 2 च्या छेदस्थानी 232 मधला शतं स्थानचा 2 छेद म्हणून लिहिला. अपूर्णांक बनल्याने उणे चिन्ह डोक्यावर न लिहिता नेहमी करतो तसे डावीकडे मांडले आहे.

उपभाजकातील $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{2}{2}\right)$ अंक स्थाने दोन आहेत. म्हणून भाज्य संख्येचे 2345 व 67 असे दोन भाग कल्पून अलग अलग लिहून मांडणी लिहिली. प्रत्येक अंक वेगळा दर्शविण्यासाठी उभ्या रेघा मारल्या.

232 = मूळ भाजक

$\bar{3}\,\bar{2}$ = संक्षिप्त उपभाजक

$-\frac{3}{2};\ -\frac{2}{2}$ (म्हणजेच 1)

$-\frac{3}{2};\ \bar{1})$ 2 | 3 | 4 | 5 || 6 | 7 (

पायरी 2

आता पायरीपायरीने डावीकडील प्रत्येक अंकाने उपभाजकाला गुणत गुणाकार एकेक अंकाखाली मांडत बेरजा घेत जाऊ व भागाकाराप्रत पोहोचू.

$-\frac{3}{2};\bar{1})$	2	3	4	5	6	7
पहिला टप्पा (2 × उपभाजक)		$\bar{3}$	$\bar{2}$			
	2	0	2	5	6	7
दुसरा टप्पा (0 × उपभाजक)			0	0		
	2	0	2	5	6	7
तिसरा टप्पा (2 × उपभाजक)				$\bar{3}$	$\bar{2}$	
	2	0	2	2	4	7
चौथा टप्पा (2 × उपभाजक)					$\bar{3}$	$\bar{2}$
	2	0	2	2	1	5

डावीकडे चार अंक. उपभाजकास चार अंकांनी एकूण चार वेळा भागून झाल्याने आपण थांबलो. आता भाग 2022 दुरूस्त करू.

मूळ भाजकाच्या (232 च्या) पहिल्या अंकाने (२ ने) भागफळास (2022 ला) भागले की भाग दुरूस्त होईल.

2022 + 2 **उत्तर 1 0 1 1** भाग **15 बाकी**

भाजकाच्या पहिल्या अंकास उपभाजकाच्या दर अंकाच्या छेदस्थानी ठेवल्याने जरी भाजक अपूर्णांकाचा राहिला तरी गणितात मध्ये कोठेच

अपूर्णांक आले नाहीत. पण नेहमीच असे कसे घडणार ? आता अपूर्णांक येणारे उदाहरण घेऊ.

मधल्या स्तंभाचा उपयोग

मागच्या साऱ्या गणितात **मधला स्तंभ वापराशिवाय राहिला.** असेही घडू शकेल की अपूर्णांक सर्वत्रच येतील. या अपूर्णांकांचे काय करावे ?

भाज्य संख्येचे डावी बाजू नि उजवी बाजू अशी विभागणी करणारा मधला स्तंभ येथे उपयोगी येतो.

नवभाजकात जेवढे अंक तेवढेच बाकीत अंक असतात असा आपण सिद्धांत मांडला आहे. त्यामुळे एक प्रश्न निर्माण होतो. तो काय व कसा सोडवायचा ?

समजा, बाकी दोन अंकी यायची हे नवभाजक पाहताच तुम्हास कळले. पण गणित करता करता बाकीच्या दहं स्थान स्तंभातील अंकाखाली दोन अंकी संख्या मांडायची वेळ आली तर ? (अंकशः बेरीज दोन अंकी आली तर ?) बाकीचे दहं स्थानी एकच अंक ठेवण्यासाठी काय क्रिया करावी लागेल ? हे दोन्ही प्रश्न वेगळी पद्धत वापरून कसे सोडविले आहेत हे शब्दापेक्षा आकडेच जास्त सुलभतेने समजावून देतील. घेऊ या असे एक उदारहण सोडवावयास !

उदा. $1699 \div 223 = ?$

पायरी 1

पटापट भागाकाराच्या येथवर शिकलेल्या पद्धतीनुसार नवभाजक काढू. भाज्य संख्येचा दर अंक अलग मांडून व मध्यावर एक स्तंभ तयार करून गणित मांडणी पुरी करू.

	$-\frac{2}{2};-\frac{3}{2}$)	1	6	9	9	(
म्हणजेच,	$-1; -1\frac{1}{2}$)	1	6	9	9	(

आता वेगवेगळे अंकशः स्तंभ पाडल्यामुळे कुठल्या अंकाचा, नवभाजकाच्या कुठल्या अंकाशी, गुणाकार केला व तो, मागे शिकलेल्या रीतीनुसारच, कोणकोणत्या अंकांखाली कसा मांडला ते तुमचे तुम्हाला कळेल. मधल्या मोकळ्या स्तंभाच्या डावीकडे "भाग" व उजवीकडे "बाकी" अपेक्षित आहे ! भागाकार-क्रिया, डावीकडचा शेवटचा म्हणजे 16 तील 6 हा अंक घेऊन

नवभाजकाच्या दर अंकास त्याने गुणून झाल्यावर पुरी होते, असे म्हटले आहे. तेथपर्यंतचे गणित चर्चेशिवाय पुढे मांडले आहे. (काय काय केले ते समजले की मगच पुढची पायरी तुम्ही पाहा.) समजा, गणित असे शेवटच्या टप्प्याला येऊन थांबले आहे :

पायरी 2

टप्पे	$-1; -1\frac{1}{2})$	1	6	9	9(
1×-1			$\overline{1}$		
$1 \times -1\frac{1}{2}$				$-1\frac{1}{2}$	
	नवभाज्य =	1	5	$7\frac{1}{2}$	9
5×-1				-5	
$5 \times -1\frac{1}{2}$					$-7\frac{1}{2}$
		1	5	$2\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$

भागाकार संपला. आता एवढ्यात
अपूर्णांक पिटाळावयास लागायचे का ? नाही.

पायरी 3

आता भाजकाच्या मूळ पहिल्या अंकाने उत्तर दुरुस्ती

तत्पूर्वी या पायरीला, मूळ भाजकातील गाळून टकलेला जो पहिला अंक होता (2) तो आठवू. आपला पहिला सिद्धांत म्हणजे प्रथम फक्त भागाचा विचार करायचा. भागफळास या दोनने भागा की अंतिम भाग मिळणार ! पण येथे 2 ने 15 ला भागताच अपूर्णांकात उत्तर आले. तेव्हा जर भाग पूर्ण अंकांचाच हवा असा गणिताचा नियम पाळायचा तर अपूर्णांक नाहीसा करावा लागेल. पूर्ण अंक डावीकडच्या भागात ठेवू नि अपूर्णांकाचा भाग, तात्पुरता, **मधल्या मोकळ्या स्तंभात लिहू.** ही **पद्धत** सांगते की स्तंभातल्या अपूर्णांकाने मूळ भाजकाला गुणायचे काम अजून संपले नाही. कारण **भाग-विभागाचाच** हा अर्धा आहे. म्हणून तो मूळ भाजकाचीच पट आहे. त्याची खरी किंमत काढून मग तो

बाकीत मिसळा.

स्तंभातल्या अर्ध्याने मूळ भाजकास गुणू. वरच्या गणितात आणखी एक टप्पा घेऊन थांबू. पुनश्च पूर्ण गणित डोळ्यापुढे राहावे म्हणून परत लिहून त्यात एकच टप्पा वाढविला आहे.

$-1; -1\frac{1}{2}$)	1	6		9	9
		-1		$-1\frac{1}{2}$	
	1	5		$7\frac{1}{2}$	9
				-5	$-7\frac{1}{2}$
	1	5		$2\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$
नवा टप्पा					
$15 \div 2$	$7\frac{1}{2}$				
	7		$\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$

आता मधल्या स्तंभातला अपूर्णांक बाकीत झिरपवलात की काम झाले. **मधल्या स्तंभातील $\frac{1}{2}$ बाकीकडे ढकलणे म्हणजेच भागाचाच तेवढा हिस्सा बाकीकडे ढकलणे होय.** (हे आपल्या गणित शिक्षकांकडून समजावून घ्या) भागाचा तेवढा हिस्सा कसा काढणार ? भागाचा अर्धा नाही करायचा. **मूळ भाजकाचा अर्धा करायचा.** म्हणजेच स्तंभात अपूर्णांक आल्याने त्या अपूर्णांकाइतकी मूळ भाजकाची पट करून ती बाकीकडे ढकलायची ! $223 \times \frac{1}{2} = 111\frac{1}{2}$

इथे परत एक छोटीशी नवी समस्या निर्माण झाली. बाकी फक्त 2 अंकांची हे ह्या उदाहरणापुरते ठरून गेले आहे. मग $111\frac{1}{2}$ चे दोन भाग करून एक भाग बाकीच्या आकड्याच्या दहं खाली मांडावा लागेल अन् दुसरा भाग बाकीच्या एकं खाली मांडावा लागेल. $111\frac{1}{2}$ मध्ये एकं स्थान म्हणून 1 न समजता $1\frac{1}{2}$ समजू. उरलेले आकडे म्हणजे 11 दहं स्थान समजू.

	बाकीचा दहं म्हणून मांडायचा हिस्सा	बाकीचे एकं म्हणून मांडायचा हिस्सा
$111\frac{1}{2}$ ची विभागणी	= 11	$1\frac{1}{2}$

चला आता परत पायरी 3 मधील शेवटच्या टप्प्याकडे. मधल्या स्तंभातला अर्धा($\frac{1}{2}$) आपण कसा नाहीसा करीत आहोत ते पाहा.

पायरी 4

$-1; -1\frac{1}{2}$)	1	6		9	9
	+	- 1		$-1\frac{1}{2}$	
	1	5		$7\frac{1}{2}$	9
	+			- 5	$-7\frac{1}{2}$
	1	5		$2\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$
$15 \div 2$	$7\frac{1}{2}$			$2\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$
	7		$\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$
				+ 11	$+ 1\frac{1}{2}$
	7			$13\frac{1}{2}$	3

पायरी 5

आता शेवटचे काम राहिले.

बाकीतील अपूर्णांक कसे पिटाळाल ?

जसे भागफळ पूर्णांक हवे तसेच बाकीतही पूर्णांक हवे. बाकीचे दहं स्थान येथे $13\frac{1}{2}$ आले व एकंस्थान 3 आले. दहं स्थानातील अपूर्णांकातल्या हिश्श्याला 10

ने गुणले की झाले त्याचे एकं स्थानात रुपांतर. (इथे पुन्हा गणित शिक्षकांना हे, का, ते विचारा) अंकांना स्थानीय मूल्य असते हे हा भागाकार तुम्हास किती सुंदर मार्गाने समजावून सांगत आहे ते पहा तरी !

13 हा पूर्णांक हिस्सा बाकीचे दहं स्थानीच ठेवू. अपूर्णांक हिस्सा म्हणजे $\frac{1}{2}$. या $\frac{1}{2}$ ला 10 ने गुणून उत्तर 5 काढू. हे 5 बाकीच्या एकं मध्ये मिळवून टाकू. स्थल संकोचास्तव फक्त खालची पायरी वरच्या गणितातून इथे उतरवून काढू या.

$-1 -\frac{1}{2}$)	1	6		9	9
	7			$13\frac{1}{2}$	3
	7			13	5 + 3
	7			13	8

उत्तर - भागफळ 7; बाकी 138

अपूर्णांकाचे दशांश अपूर्णांकात रुपांतर करून गणित आणखी सोपे होते

उदा. 1699÷ 223 = किती ?

$-\frac{2}{2}$; $-\frac{3}{2}$ = -1; - 1.5 = उपभाजक

- 1; - 1.5)	1	6		9	9
+		- 1		- 1.5	
	1	5		7.5	9
				- 5	- 7.5
	1	5		2.5	1.5
15 + 2 = 7.5	7.5			2.5	1.5
	7		.5	2.5	1.5
.5 × 223 = 111.5					
				11	1.5
		7		13.5	3
		7		13	8

उत्तर भाग 7 बाकी 138

***

प्रकरण ६ वे

भाजक अनुरूप करून घेऊन भागाकार

10 च्या घाताच्यापेक्षा थोड्याशाच अंकांनी जादा असणाऱ्या संख्यांनीच काय, पण दहाच्या कुठल्याही घाताच्या कुठल्याही पटीच्या जवळच्या संख्येने तुम्ही आता झटपट भागू शकाल. कारण 'प्रत्येक संख्या दहाच्या घाताच्या कुठल्या तरी पटीच्या जवळ असतेच' या व्याख्येने साऱ्याच संख्या तुम्हास अनुरूप्येण मंत्राने वश होऊन जातील.

भाजक संख्येचा 1 ला अंक 1 खेरीज अन्य आला की नेहमीच अशी तारांबळ उडेल असे मुळीच नाही. उदाहरणार्थ भाजकाचा 1 ला अंक हा जर भाजक संख्येचाच एक अवयव असेल (थोडक्यात जर 1 ल्या अंकाने पुऱ्या भाजकाला भाग जाऊ शकत असेल) तर काहीच अडचण येत नाही. खालील 2 उदाहरणे बघा. येथे 2 ने उपभाजकाचे दर अंकाला वेगवेगळे न भागता सबंध उपभाजकाचीच निमपट करून घेतली आहे.

समजा, तुम्हास 1234 ला 222 ने कुणी भागावयास सांगितले. तुमच्या लगेच लक्षात येईल की 222 या संख्येचा प्रथम अंक 2 हा 222 चा एक अवयव सुद्धा आहे. 222 या संख्येची फोड 111 × 2 अशी होऊ शकेल ! अशा वेळी, 222 ने भागत बसण्यापेक्षा, भाज्य-संख्येस प्रथम 111 ने भागावे. कारण 111 ने भागण्यासाठी आपल्याजवळ सोपी रीत आहे. नंतर उत्तरास पुन्हा अवयव 2 ने भागून अंतिम उत्तर सहज काढता येईल.

बघा :-

उदा.

1234 ÷ 222

222

2) 222 (111

<u>111 ने प्रथम भागा</u>

	$\bar{1}\bar{1}$)	12		34 (
		$\bar{1}$		$\bar{1}$
		11		24
				$\bar{1}\bar{1}$
	2)	11		13
दोनने भागा.		$5\frac{1}{2}$		
अपूर्णांक मधल्या स्तंभात लिहा.		5	$\frac{1}{2}$	13
मूळ भाजक $\times \frac{1}{2} = 111$ (बाकीत मिळवा)				+ 111
		5		124

उत्तर 5/124

उदा.

2699 ÷ 224

224

2) 224 (112

<u>112 ने प्रथम भागा</u>

$\bar{1}\bar{2}$)	26	99 (
	$\bar{2}$	$\bar{4}$
	24	59
		$\bar{4}\bar{8}$
24 ÷ 2)	24	11
	12	
	12	11

उत्तर 12/11

सारा भागाकार एकदम सोपा झालेला ! फक्त 1 ते 10 चे पाढे येणाऱ्याला 7685 ला 672 नेही भागता येईल. केवळ ही रीत शिकवा की पुरे. 672 ला 6 ने भागून 112 काढा. पैकी 12 निवडा. त्यांच्या डोक्यावर उणे चिन्ह मांडून भागाकार द्रुतरीतीने करायचा. आलेल्या उत्तरातील डाव्या भागास फक्त 6 ने पुन्हा भागले की झाले. फार अपूर्णांक आले तर काय करायचे ? ते खालच्या उदाहरणात परत बघा.

उदा. 7685 ÷ 672 = किती ?

स्पष्टीकरण :-

गणित 112 भाजक धरून सोडवून तुम्ही सरळ बाकी ($\bar{5}7$) पर्यंत गेलाय.

पायरी 1- बाकीत उणे अंक असल्याने त्याचा धन अंक करून घेतला. त्यासाठी $\bar{1}$ तयार करावा लागला तो मधल्या स्तंभात मांडला.

(बाकीतील दहं स्थानचा उणे पाच + 5 केला व डावीकडे $\bar{1}$ जोडला.) पुन्हा एकदा गुणाकार बेरीज क्रिया केली व नंतर $\bar{1}$ मिळवून 69 चे 68 केले

पायरी 2 - आता या उत्तरास 6 ने पुन्हा भागल्यावर $11\frac{2}{6}$ आले. तेव्हा 11 डावीकडे ठेऊन $\frac{2}{6}$ बाकीकडे रवाना करण्यासाठी मूळ भाजकाचा $\frac{2}{6}$ काढला. 224 आले. ते बाकीत मिळवले.

$\overline{12}$)	7	6		8	5
		$\bar{7}$		$\overline{14}$	
	7	$\bar{1}$		$\bar{6}$	5
				1	2
	7	$\bar{1}$		$\bar{5}$	7
	6	9	+ $\bar{1}$	5	7
		1		1	2
	6	8		6	9
	$11\frac{2}{6}$			6	9
	11			+ 224	
	11			293	

11/293 हे उत्तर

परिवर्तन क्रिया - एक जादूची कांडी

नव्या ज्ञानाने नवी दृष्टी प्राप्त होते. या नव्या दृष्टीने भागाकाराच्या जगाकडे पाहा. त्यातून नवे ज्ञान प्राप्त होईल.

कुठलीही भाजक संख्या 'दहाच्या घातापेक्षा थोड्याच अंकांनी जास्त' अशा स्वरूपाची बहुधा करता येते. फक्त तिला कशाने तरी गुणायचे किंवा भागायचे.

भागक्रिया पुरी करायची.

नंतर डाव्या बाजूला आलेल्या भागफळाला ज्या कशाने भागले त्याच आकड्याने भागायचे; किंवा गुणले त्याच आकड्याने गुणायचे.

तुम्हाला 1177 ला 516 ने भागायचे आहे ?

नियम पाहा. 516 ला कशानेही भागून वा गुणून 10च्या घातापेक्षा थोड्या अंकांनी जास्त अशी संख्या मिळवा. वर शिकवल्याप्रमाणे 516 × 2 = 1032 करता येतील. भागफळाला 2 ने पुन्हा गुणून बरोबर उत्तराप्रत आपोआप पोहोचाल. मोजक्या पायऱ्यात दिलेले हे गणित वाचा :-

उदा. 1177 ÷ 516 = किती ?

```
    516
×     2
-------
   1032
```

$\bar{0}\bar{3}\bar{2}$)	1		1	7	7 (
			0	$\bar{3}$	$\bar{2}$
	1		1	4	5
×	2				
	2		1	4	5

उत्तर भागफळ 2

बाकी 145

कितीही प्रकारचे वर वर अवघड दिसणारे भागाकार वरच्या रीतीने सुलभ झालेले अनुभवाला येईल. कारण गुणून वा भागून आपल्याला कुठल्याही संख्येचे सोयीच्या संख्येत रूपांतर करून घेता येते. संख्या अनुरूप करून घेता येते.

उदा. 200168 ÷ 8888 = ?

8888 ÷ 8 = 1111

$\bar{1}\bar{1}\bar{1}$)	2 0 0		1 6 8
+	$\bar{2}\bar{2}$		$\bar{2}$
	2 $\bar{2}\bar{2}$		$\bar{1}$ 6 8
	2		2 2
	2 $\bar{2}$ 0		1 8 8
			0 0 0
	2 $\bar{2}$ 0		1 8 8
	1 8 0		1 8 8
(180 ÷ 8)	2 2	.5	
8888 × .5 = 4444			+ 4 4 4 4
	22		4 6 3 2
भाग 22;			**बाकी** 4632

लहान मोठे सारे गणिताला सारखेच

जसे कायद्यापुढे लहान, मोठा, सारे सारखेच असतात तसेच गणिताच्या विश्वात आहे. जो नियम लहान अंकाना तोच मोठ्या अंकांना वा संख्यांना लागतो.

भाजक १० चे घातापेक्षा बऱ्याच अंकांनी मोठा असेल तरी भागाकार द्रुत रीतीत बसवता येतो.

उदाहरणार्थ,31 हा 10पासून खूपच दूर (दहापेक्षा खूप मोठा) आहे. पण हा सुद्धा अनुरूप करून घेता येईल.

> **भाजक संख्येची काही पट करून, ती मोठी करून घ्या. द्रुतरीत लावा नि मग पुन्हा त्याच पटीने गुणून उत्तर काढा.**

उदा. 1011÷ 31 = ?

31 × 3 = 93;

93 = 10$\bar{7}$; 10$\bar{7}$ = 1$\bar{1}$3

- 1$\bar{1}$3 मधला 1 सोडा. चिन्हे पालटा. **नवभाजक = 1 $\bar{3}$**

-परावर्त्य सूत्राने भागाकार सुरू :

	1$\bar{3}$)	1 0		1 1	
		1		$\bar{3}$	
		1 1		$\bar{2}$ 1	
				1 $\bar{3}$	
उणे बाराचे धन अङ्ठ्याऐंशीत		1 1		$\bar{1}\bar{2}$	
रूपांतर करा.		1 1		$\bar{2}$ 8	
		1 1	$\bar{1}$	8 8	
($\bar{1}$× 1$\bar{3}$ = $\bar{1}$3)	+			$\bar{1}$ 3	(13 म्हणजेच 7)
मधला स्तंभ आता डावीकडे		1 1+ $\bar{1}$		8 1	
मिसळेल		1 0		8 1	
		× 3			
भाग 2ने वाढवा व (31 × 2) 62		3 0		8 1	
बाकी 81 तून वजा करा.		+ 2		- 6 2	
बाकी मूळ भाजकाच्या	उत्तर	3 2		1 9	

दुपटीहून मोठी. म्हणून भाग 2 ने वाढवला.

थोडक्यात शीघ्र भागाकाराची कला ज्याला शिकायची त्याला नवी दृष्टी प्राप्त करून घ्यायला हवी नि नव्या दृष्टीने साऱ्या जुन्या गणिताकडे पुन्हा पाहावयास हवे. या प्रयोगात जे काही अनुभव येतील ते रोमहर्षक असतील याबद्दल शंका नाही.

भाजक १० चे घातापेक्षा बऱ्याच अंकांनी जरी छोटा असेल तरी त्याला द्रुतरीत लावता येते.

त्यासाठीच तर अनुरूप्येण मंत्र !

उदा. 1111 ला 21 सारख्या छोट्या संख्येने भागताना वरील द्रुत-रीत वापरता येईल का ?

निश्चित येईल. फक्त 'भाजक वाढवा' ही सूचना पाळायची.

पायरी 1 -

भाजक 21 ची चार पट करायची की येणारी संख्या (84) 10 च्या घाताच्या जवळची मिळेल. $21 \times 4 = 84 = 1\overline{16}$.

पायरी 2 -

$1\overline{16}$ मध्ये 6 हा जड अंक आला. ह्याही ठिकाणी परिवर्तन करून छोटा अंक आणता येईल. $1\bar{1}\,\bar{6} = 1\bar{2}4$.

आता $1\bar{2}4$ पैकी फक्त $\bar{2}4$ उचला. $\bar{2}4$ ची चिन्हे उलटी करून $2\bar{4}$ मिळवा. अंती $2\bar{4}$ हा तुमचा नवभाजक झाला.

पुढचा भागाकार पूर्वी चर्चिलेल्या द्रुत रीतीने चालू करा. मात्र जर मध्येच कुठे उणे चिन्ह आले तर त्याचे परिवर्तन करून धन अंकात रूपांतर करायचे.

पायरी 3-

आता एवढेच करायचे. 21 हा मूळ भाजक होता व त्याची 4 पट करून घेतली होती हे आठवा. आलेल्या उत्तरातल्या फक्त डाव्या भागाला त्या पटीने म्हणजे 4 ने गुणा.

$2\bar{4}$)	1	1		1	1
	+	2		$\bar{4}$	
	1	3		$\bar{3}$	1
				6	$\overline{12}$
	1	3		3	$\overline{11}$
	1	3		3	$\bar{2}9$
	1	3		1	9
	×	4			
उत्तर	5	2		1	9
	(भाग)				(बाकी)

$21 \times 4 = 1\ \bar{1}\ \bar{6}$ तसेच ठेवूनही भागाकार झालाच असता ! $1\ \bar{1}\ \bar{6}$ पैकी 1 सोडा. उरलेल्याची चिन्हे बदला.

16)	1	1		1	1	(
		1		6		
	1	2		7	1	
				3	2	
	1	2	1	0	3	
				1	6	
	1	3		1	9	
×		4				
	5	2		1	9	

(उत्तर : 52/19)

सर्व देव नमस्कारं । केशवं प्रतिगच्छति ।

ज्या प्रमाणे कुठल्याही दैवताची पूजा केली तरी अखेरी ते नमन केशवालाच जाऊन पोहचते त्याप्रमाणे नवभाजक काहीही बनविला तरी या अद्‌भुत रीतीने तो तुम्हास बरोबर उत्तराकडेच घेऊन जातो.

खूप उदाहरणे सोडवणे म्हणजेच रीत आत्मसात करणे :

10, 100, 1000 वगैरे सारे दहाचे घात आहेत. भाजक जर या घातांपेक्षा जास्त असले अन् त्याचवेळी फार लांबचे नसले (म्हणजे 112, 121

वगैरे चालतील पण 189, 165 असे नकोत) तर न चुकता वरचीच रीत वापरा. निश्चित सोपी जाईल.

खालील उदाहरणे वरच्याच रीतीने सोडवून रीतीवर प्रभूत्व मिळवा. पुढचे प्रत्येक उदाहरण तुम्ही शिकलेल्या रीतीने सुटतेच सुटते. जर तुमचे उत्तर चुकले तर रीत परत वाचून काढा व चूक शोधा.

उदाहरणे	उत्तर
1) 134 ÷ 12	11/2
2) 1533 ÷ 13	117/12
3) 23325 ÷ 104	224/29
4) 111212÷ 1102	100/1012
5) 2699 ÷ 224	12/11
6) 16696 ÷ 1102	15/166
7) 1254 ÷ 114	11/0
8) 1174 ÷ 130	9/4
9) 1235 ÷ 160	7/115
10) 13456 ÷ 1123	11/1103
11) 1340 ÷ 113	11/97
12) 11111 ÷ 1012	10/991
13) 15792 ÷ 1105	14/322
14) 12127 ÷ 124	97/99
15) 234567 ÷ 232	1011/15
16) 1699 ÷ 223	7/138
17) 1234 ÷ 222	5/124
18) 7685 ÷ 672	11/293
19) 1177 ÷ 516	2/145
20) 200168 ÷ 8888	22/4632

***

प्रकरण ७ वे

भाजक दहाच्या घातातून वजा करून भागाकार

दहाच्या घातापेक्षा मोठ्या अन् त्याचवेळी जवळच्या संख्यांपैकी भाजक असेल तेव्हा कसं भागायचं हे आपण प्रकरण 5 पाठ 1 मध्ये पक्के शिकलो.

यासाठी परावर्त्य योजयेत् हा 'तिळा उघड' सारखा जादूचा मंत्र आपल्याला दिलेला आहे.

जेव्हा भाजक दहाच्या घातापेक्षा लांबचा असेल तेव्हा त्यास प्रथम कशाने तरी भागून (वा गुणून) तो जवळचा करून घ्या, भागाकार परावर्त्य रीतीनेच पटकन करून टाका व 'भाग' त्या ज्या कशाने भागाले (वा गुणले) त्यानेच पुनश्च भागून (वा गुणून) दुरुस्त करा हा दुसरा जादूचा मंत्र ! या मंत्राचे त्यांचे शब्द होते अनुरूप्येण. अर्थ = भाजक दहाच्या घातापेक्षा दूरच्या संख्येचा आहे म्हणता ? मग अनुरूप करून घ्या.

पण मग काही काही भागाकार करताना हा भाग दुरूस्त करायची क्रिया जिकिरीची वाटते.

त्यावर उपाय एक तिसरा मंत्र शिकू. त्या मंत्रचे शब्द आहेत :-

दशमूनम् ।

या मंत्राने दहाव्या घाताच्यापेक्षा दूर असलेल्या संख्या दहाच्या घाताच्या जवळच्या बनतील. दश ऊनम् चा अर्थ दहातून उणे करा. या दहा शब्दात दहा आकडा व दहाचे घात असलेले

$10^2(100), 10^3(1000), 10^4(10,000), 10^5(1,00,000)$

वगैरे वगैरे सारे अंतर्भूत आहेत.

फक्त एकच होईल.

त्यातल्या काही काही अंकांचे चिन्ह उणे होईल. पण त्यामुळे काहीही अडचण येणार नाही.

प्रथम दशमूनम् मंत्र म्हणजे काय ते शिकू व त्यातून जो भाजक मिळतो तो दहाच्या घाताच्या जवळचा होतो याची प्रचिती घेऊ.

दशमूनम् मंत्र

एक अशी भाजक संख्या, जी दहाच्या घातापासून जवळ नाही, खूप दूर आहे, म्हणजे 6, 7, 8 व 9 अशा मोठ्या अंकांनी बनलेली संख्या, पाहा.

उदाहरणार्थ 8 8 8 9

दशमूनम् = ती जवळच्या दहाच्या घातातून वजा करा.

अ) 8 8 8 9 या संख्येची, आपण जर उणे चिन्हे वापरली तर, एक सोपी संख्या करता येईल हे एक सत्य आपल्या नजरेस हे तंत्र येथे आणून देते.

८८८९ = $1\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}$

कसे काय दुवा ?

तुम्हीच पाहा :

पहिल्या 1 चे स्थान आहे दशसहस्र.

म्हणजेच पहिल्या 1 चा अर्थ झाला 10,000

पुढचे सारे अंक डोक्यावर उणे चिन्ह असलेले आहेत.

गणितात यालाच - 1111 म्हणतात.

आता हे 1111 दहा हजार मधून उणे करा.

$$\begin{array}{lr} & 1111 \\ \hline \text{उत्तर :} & 8889 \end{array}$$

म्हणजे 8 8 8 9 लिहिले काय, किंवा $1\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}$ लिहिले काय, भाजक संख्या तीच राहिली. दशमूनम् मंत्र 8 8 8 9 चे $1\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}$ मधे रूपांतर करतो. अशी सोपी संख्या करून घेऊन प्रकरण पाचच्या परावर्त्य पध्दतीनेच आता तुम्हास 2002002 ÷ 8889 सोडविता येईल.

चला, प्रत्यक्ष सोडवून बघू या.

नवभाजक	डावी बाजू			मोकळा स्तंभ		उजवी बाजू		
1111)	2	0	0		2	0	0	2 (
+		2	2		2	2		
+	2	2	2		4	2	0	2
			2		2	2	2	
	2	2	4		6	4	2	2
+					4	4	4	4
	2	2	4		10	8	6	6
	2	2	4	1	0	8	6	6
					1	1	1	1
	2	2	5		1	9	7	7

उत्तर - 225/1977

ताळा : (8889 × 225) + 1977 बाकी = 2002 002 (भाज्य)

टीप : 'परावर्त्य योजयेत्' पद्धत वारंवार बजावते, नवभाजकात जेवढे अंक तेवढेच भाज्य संख्येचे अंक उजवीकडे अलग पाडा. इथे नवभाजकात चार अंक. म्हणून उजवी बाजू चार अंकांची करून मध्यावर एक जादा स्तंभ मोकळा सोडला.

तसेच ते सूत्र सांगते की बाकीकडे चारपेक्षा जादा अंक आले की ते मधल्या स्तंभात हातचा म्हणून लिहा. वर तेच केले. 10866 पैकी 1 मधल्या स्तंभात रवाना केलाय.

पुढे सूत्र सांगते 'हा 1 भाग डाव्या बाजूतल्या शेवटच्या अंकाचा (4 चा हिस्सा समजा. त्याने नवभाजकाच्या दर अंकास पुन्हा गुणा. हा गुणाकारही 4 चे गुणाकार जेथे मांडलेत तेथेच मांडायचा.

तसेच शेवटच्या पायरीला केले आहे.

तात्पर्य, परावर्त्य रीत पक्की यावयास हवी. ती एकदा आली की भाजक 'दहाच्या घाताच्यापेक्षा थोडा जास्त' अशा जातीचा नसला तरी तसा तो अनुरूप्येण व दशमूनम् युक्त्यांनी करून घेता येतो व भागाकाराची लढाई जिंकता येतेच.

दशमूनम् युक्तीने एक गणिती-मन्त्र आपल्या ध्यानात आले आहे तिकडे

तुमचे लक्ष वेधतो.

ते सत्य असे :-

संख्येतल्या अंकाचे चिन्ह + असो वा -, भागाकारात काहीही अडचण येत नाही.

उदाहरणार्थ 13456 ÷ 1123 करताना नवभाजक $\bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$ मिळाला होता. तरी भागाकार करू शकलात.

तेच 2002 002 ÷ 8889 करताना नव भाजक 1111 आला. तरीही तुम्ही भागाकार करू शकलात.

जर चिन्हांची अडचण होणार नसेल तर मग अवघड भाजकातून सोपा भाजक केल्यावरही त्या सोप्या भाजकाहूनही अती सोपा भाजक चिन्ह बदल क्रिया वापरून का तयार करू नये ?

असे उदाहरणच घेऊ या.

भाजक संख्या 10 चे घातापेक्षा खूप दूरची असेल तर ?

क्रियासूत्र : पुनर्परावर्त्यः ।

"चिन्हे बदला" या सुत्राचा वापर करून सोपे नवभाजक तयार करावे. परंतु त्या नवभाजकातलेही अवघड मोटे अंक पुनश्च परिवर्तन क्रिया करून छोटे करून घ्यावे.

उदा. 103 ÷ 82 = किती ?

भाजक 82 मधून उपभाजक काढू. त्यासाठी 2 दहातून नि 8 नऊतून वजा करू. नवभाजक 18 आला. (हा 18 म्हणजेच $1\bar{1}8$ कसा हे वर दिले आहेच) आता आपले नवे सूत्र सांगते की 18 मधील 8 हा अंक मोठा आहे तो परिवर्तन क्रियेने छोटा करून घेतल्याने गणित आणखी सोपे होईल. अधिक ८ चे उणे २ मध्ये रूपांतर कसे होईल ? त्यासाठी 8 दहातून वजा करा नि आठचे डावीकडचा अंक + 1 ने वाढवा. कारण 8 म्हणजे 10 - 2 होय.

$8 = 1\bar{2}$

$82 = 1\ \bar{1}\ \bar{8} = 1\ \bar{2}\ 2$

डावीकडचा 1 अंक सोडा नि उरलेल्या अंकांची चिन्हे बदला.

$1\bar{2}2 = 2\bar{2}$ = नवभाजक

आता 103 ला 82 ने भागण्याऐवजी $2\bar{2}$ ने भागले तरी तेच उत्तर निघेल. बघा.

$2\bar{2}$) 1		0 3
		$2\bar{2}$
	1 /	21 उत्तर

आणखी एक उदाहरण अभ्यासले की हे तंत्र पुरे आत्मसात होऊ शकेल. उदा. 12341 ÷ 819 = किती ? (819 चे रुपांतर प्रथम एखाद्या सोयीच्या संख्येत असे करून घेऊ)

819

$1\bar{1}\ 8\bar{1}$ = न. भा.	181 =	$2\bar{2}1$
$2\bar{2}1$)	1 2	3 4 1
	2	$\bar{2}$ 1
	1 4	1 5 1
		$8\bar{8}4$
म्हणजेच	1 4	$9\bar{3}5$
म्हणजेच =	1 4	8 7 5
बाकीतून भाजक		
वजा करा, भाग		- 8 1 9
एकने वाढवा	15	56
	उत्तर भाग	15
	बाकी	56

आता पुढच्या प्रकरणाकडे वळण्यापूर्वी भागाकाराच्या किती रीती इथपर्यंत शिकलात त्याचा आढावा घ्या.

परिवर्त्य रीत

अनुरूप्येण रीत

दशमूनम् रीत

पुढच्या रीतीला भागाकाराचा राजा म्हणता येईल. तिचं नाव निखिलं रीत. तिची ओळख याच प्रकरणाच्या शेवटास इथे करून घेऊ.

पुढच्या प्रकरणात मग 10 च्या घाताच्यापेक्षा थोड्याच अंकांनी कमी

असणाऱ्या संख्यांचा पूरक तुमच्यासाठी सोपा भाजक म्हणून हातात ठेवणारी चौथी निखिलं रीत तपशीलात शिकू.

भाजकातून सोपा भाजक बनवण्यासाठी मूळ भाजक दहातून (उनं) वजा करणे किंवा दहाच्या घातातून वजा करणे हा मार्ग दशमूनं मंत्राने आपणास कळला. येणाऱ्या वजाबाकीचा पहिला अंक विसरणे व उरलेल्या अंकांची चिन्हे उलट करणे हे आपणास परावर्त्य मंत्राने शिकवले.

पण दहाच्या घातातून एखादी संख्या वजा करायची, तिचा पहिला अंक विसरायचा अन् बाकीच्या उरलेल्या अंकाचे चिन्ह बदलायचे ही तीनही कामे एका झटक्यात झाली तर किती बरे होईल नाही ?

नेमका हाच विचार करून 'निखिलं' सूत्र शोधले गेले.

भाजक घ्या. त्याचा एकं दहातून वजा करा. उरलेले 9 तून वजा करा. तुम्हास हवे तेच घडेल.

हे नवे गुपित कळण्यापूर्वी आपण काय करीत होतो ते पाहा.

1)	भाजक	8889
2)	तो दहाच्या योग्य जवळच्या घातातून वजा केला.	10000
		- 8889
		$1\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}$
3)	पहिला 1 सोडला	$\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}$
4)	उरलेल्यांचे चिन्ह बदलले	1111

निखिलं रीत : "शेवटचा दहातून; इतर उरलेले नऊतून !

या रीतीने हाच 1111 आकडा 8889 पासून एकदम प्राप्त होईल.

-	9	9	9	10
-	–8	–8	–8	- 9
	1	1	1	1

भागाकार आणखी सोप्यात सोपा करण्यासाठी ही रीतही येथे सादर करीत आहोत. या रीतीचा थोडक्यात अर्थ, **भाजकाऐवजी पूरकाने भागायची पद्धती.**

❋❋❋

प्रकरण 8

पूरक पद्धतीने भागाकार

पूरक तंत्र

दहाचे घातापेक्षा कमी असलेल्या भाजकाने भागाकार (म्हणजे 7, 8, 9 अशा अंकांनी युक्त अवघड भाजकाने भागाकार :-)

रीत :- भाजकाऐवजी भाजकाची पूरक संख्या घेऊन तिने भागावे.

शेवटचा अंक 10 तून अन् उरलेले 9 तून वजा केले की कुठल्याही संख्येची पूरक संख्या मिळते. यालाच निखिलं असे नाव वैदिक गणितात दिले गेले आहे.

या पूरक संख्येच्या मदतीने 2012308 ला 89988 ने भागा असे जरी तुम्हाला कोणी सांगितले तरी क्षणात भाग 22 व बाकी 32572 असे उत्तर तुम्ही देऊ शकाल.

हीच क्रिया या पाठात आपण आता क्रमशः शिकणार आहोत.

भाग 1

भाज्य संख्येतील एकूण अंक संख्या भाजक संख्येतील अंकसंख्येपेक्षा एका अंकाने जास्त

भाज्य संख्येच्या प्रथमांकाने सबंध पूरकाला गुणावे. पुरा गुणाकार भाज्य संख्येखाली उजवीकडून डावीकडे मांडत जावे. बेरीज घ्यावी. भाग व बाकी एकापुढे एक आलेली दिसेल.

उदा. 120 × 89 = ? (भाजक दोन अंकी तर भाज्य तीन अंकी)

भाजक संख्येपेक्षा भाज्यसंख्येत एकच अंक जादा आहे असे उदाहरण वर

घेतले. हा भागाकार असा करा :

भाजक 89 चा निखिलं रीत वापरून पूरक काढा. म्हणजेच 9 दहातून व 8 नवातून वजा करावयाचा. पूरक = 11. भाज्य संख्येखाली पूरकाची भाजक संख्येच्या पहिल्या अंका इतकी पट (इथे एक पट) उजवीकडून मांडून घ्यायची व बेरीज घ्यायची की भाग व बाकी आपोआप मिळेल. भाग कुठला व बाकी कुठली हे बेरजेतून ओळखण्याकरता आणखी एक युक्ती करावी लागेल. भाज्य मांडून घेतानाच भाज्य संख्येतले उजवीकडून पूरकाएवढे अंक आधी लिहावयाचे व थोडे अंतर सोडून भाज्य संख्येतले उरलेले अंक डावीकडे लिहायचे. म्हणजे डावीकडची बाजू **भाग** व उजवीकडची बाजू **बाकी** हे कळेल.

(पूरक आणि नवभाजक एकच !)

उदा. 120 ÷ 89 = किती ?

भाजक 89 = 11 = नवभाजक

	11)	1	20
(11× 1 = 11)	+		11
		1	31

उत्तर भागफळ 1 बाकी 31

संख्येतील अंकांची अशी आणखी काही उदाहरणे पाहा की लक्षात येईल की जेथे भाजक संख्येतील अंकांची संख्या भाज्य संख्येतील अंकांच्या संख्येपेक्षा एखाद्याच अंकाने छोटी असते तेथे अगदी निमिषार्धात भागाकार पुरा करून टाकण्याचे सामर्थ्य निखिलं तत्व वापरून तुम्ही नवभाजक बनवून घेतलात की तुमच्यात येते.

उदा. 200345 ÷ 98799 = किती ?

भाजक 987 99 =		01201 = नवभाजक
01201)	2	0 0 3 4 5
(01201 × 2)	+	0 2 4 0 2
	2	0 2 7 4 7

उत्तर भाग 2; बाकी 2747

उदा. 31103 ÷7796 = किती ?

(या उदाहरणात दर अंकाचा एकेक वेगळा स्तंभ तयार करून घेऊ.)

भाज्यसंख्येच्या पहिल्या अंकाने भाजक संख्येच्या प्रत्येक अंकास वेगवेगळे गुणू. दर गुणाकार दर स्तंभात वेगवेगळा लिहून टाकू. भाज्य संख्येच्या दर अंकास गुणून भाज्य-संख्येच्या दुसऱ्या अंकाखाली पहिला गुणाकार, तिसऱ्या अंकाखाली

दुसरा गुणाकार, वगैरे मांडत चला.

भाजक 7796 = 2204 = नवभाजक

2204)	3		1	1	0	3	(
+			6	6	0	12	
	3		7	7	0	15	
	3		7	7	1	5	

एका स्तंभात एकच अंक उत्तराचा हवा. म्हणून उजव्या टोकाच्या स्तंभातील 15 पैकी 1 डाव्या स्तंभात जमा केला व एकं स्थानचा 5 होता त्या जागीच ठेवला.

उत्तर भाग 3; बाकी 7715

बाकी काहीवेळा मूळ भाजकापेक्षा (परावर्त्य रीतीप्रमाणे) इथेही जास्त येईल.

त्यासाठी आणखी उदाहरणे घेऊ व मधल्या स्तंभाचा परावर्त्य रीतीप्रमाणेच वापर करायला शिकू.

जेव्हा बाकी म्हणून येणारी संख्या मूळ भाजकापेक्षा मोठी येते तेव्हा ती बाकी भाज्य समजून परत एकदा भागाकार करायचा. जे उत्तर येईल, त्यातला भाग जुन्या भागात मिळवायचा व नवी बाकी हीच अंतिम बाकी म्हणून निश्चित करायची.

मधल्या स्तंभाचा वापर असा होतो

उदा. 817 + 89 = किती ?

भाजक 89 = नवभाजक 11

11)	8		1	7
+			8	8
	8		9	15
	8		10	5

बाकीच्या एकं स्थानदर्शक स्तंभात 15 चे एकम् म्हणजे 5 ठेवा.

आता उजवीकडचा भाग बाकी मानलीत तर 105 ही बाकी मूळ भाजक 89 पेक्षा जास्त आली. भाग 8 एकने वाढवून भागफळ 9 म्हणणे. बाकीतून म्हणजे 105 मधून 89 वजा करून अंतिम बाकी 16 म्हणता येईल.

पर्यायी पद्धत :

10 पैकी 0 जागेवर ठेवा 1 मधल्या स्तंभात ढकला. हा 1 आता भाग बाजूचा झाला. म्हणून त्याने पुन्हा नवभाजकाला भागा.

नंतर मधल्या स्तंभातला 1 भाग बाजूत जमा करून टाका.

11)	8		1	7	(
+			8	8	
	६		9	15	
	8		10	5	
	8	1	0	5	
			0	5	
	9		1	1	
	9		1	6	
	9		16		

उत्तर **भाग** 9 **बाकी** 16

उदा. 940012 ÷ 78979 = किती ?

भाजक 78979 ; नवभाजक 21021

भाजक 78979 पासून नवभाजक काढण्याची रीत म्हणजे निखिलं नवतः ! चरमं दशतः ।. हे सूत्र होय. या सूत्राच्या अर्थाप्रमाणे शेवटचा (चरमं) अंक दहातून वजा करा व उरलेले 9 तून वजा करा की नवभाजक 21021 आपोआप मिळतो.

21021)	9		4	0	0	1	2 (
(पूरक × 9) +			18	9	0	18	9
	9		22	9	0	19	11
पायरी - 1	9	2	2	9	2	0	1
पायरी - 2	11		4	2	0	4	2
पायरी - 3	11		7	1	2	4	3

उत्तर : **भाग** 11 **बाकी** 71243

पायरी 1 एकेका स्तंभात एकेकच अंक ठेवायचा. जादा अंक डावीकडच्या स्तंभात ढकलावयाचा. ह्या रीतीने उजवीकडून डावीकडे वर बेरीज करीत मांडत गेलो. अंती 2 हातचा उरला. तो मधल्या स्तंभात लिहिला.

पायरी 2 मधल्या स्तंभातील 2 ने उपभाजकास गुणा व नंतर स्तंभ

डावीकडे जमा करा.

पायरी 3 स्तंभशः उजवीकडून डावीकडे बेरीज घेणे सुयोग्य मार्ग होय. त्यामुळे नेहमीप्रमाणे हातचे डावीकडे जमा करीत जा.

समजा तुम्हाला पुरा नवभाजक गुणिले भाज्य संख्येचा पहिला अंक यांचा गुणाकार करणे एकेका अंकाचा स्तंभशः गुणाकार करीत बसण्यापेक्षा जास्त सोपे वाटत असेल तर वरील रीतीत थोडा फेरफार करून हाच भागाकार असा करा :-

1) भाजकातून नेहमीप्रमाणे पूरक बनवा.

2) भाज्य संख्येचा पहिला अंक व पूरक यांचा पूर्ण गुणाकार करून टाका. तो पूर्ण गुणाकार भाज्य संख्येच्या दुसऱ्या अंकापासून खाली मांडून टाका. बेरीज घ्या. ही एकदम सुलभतर रीत आहे.

उदा. 51130208 ÷ 9788997

मूळ भाजक	9788997
पूरक	0211003
पूरक × पहिला अंक	1055015
(5 × 0211003)	

	5	1 1 3 0 2 0 8
+		1 0 5 5 0 1 5
	5	2 1 8 5 2 2 3

उत्तर भाग 5; बाकी 2185223

पुन्हा बघा :-

उदा. 70203040508 ÷ 9999877879

मूळ भाजक 9999877879 ; पूरक 0000122121.

पूरक × 7 = 0000854847

	7	0 2 0 3 0 4 0 5 0 8
+		0 0 0 0 8 5 4 8 4 7
	7	0 2 0 3 8 9 5 3 5 5

उत्तर भाग 7; बाकी 203895355

ही घ्या अशीच झटपट सोडवलेली अवघड अवघड उदाहरणे !

सराव

1) 12346 ÷	8888
पूरक =	1112
1	2346
+	1112
1	3458 उत्तर

2) 1010808 ÷	899997
पूरक =	100003
1	010808
+	100003
1	110811 उत्तर

3) 12046 ÷	7999
पूरक =	2001
1	2046
+	2001
1	4047 उत्तर

4) 1288 ÷	887
पूरक =	113
1	288
+	113
1	401 उत्तर

5) 3002 ÷	789
पूरक =	211
3	002
+	633
3	635 उत्तर

6) 5011021 ÷	88799
पूरक =	11201
5	01021
+	56005
5	57026 उत्तर

7) 37335 ÷		8888
पूरक =		1112
3		7335
+		3336
3		10671
3	1	0671
1		1112
4		1783

उत्तर 4/1773

8) 5113 ÷		799
पूरक =		201
5		113
+		1005
5		1118
5	1	118
1		201
6		319

उत्तर 6/319

असे राक्षसी दिसणारे भागाकार केवळ 2-2 पायऱ्यात मी सोडवलेले पाहून परदेशातले गणितीही चकित होऊन गेले.

आता याच्याही पुढच्या पायऱ्या शिकून निखिलं मंत्राचा पुरा उपयोग आत्मसात करू या.

दर वेळेला काही भाज्य व भाजक यांच्यात एकाच अंकाचा फरक राहाणार नाही. समजा 200168 ÷ 8889 करायची वेळ आली तर ? इथे

भाज्यात 6 अंक तर भाजकात चार अंक आहेत. म्हणजे एक गुणाकार वाढेल.

भाग 2

भाजक संख्येपेक्षा भाज्य संख्येत दोन अंक जास्त

विषय नीट समजावा म्हणून आपण असे भाज्य संख्येतील व भाजक संख्येतील फरक अंका अंकाने वाढवत आहोत. 1114 × 899 करताना भाज्य संख्या 4 अंकी आहे व भाजक तीन अंकी आहे. त्यामुळे फक्त एकच गुणाकार करून भागणार आहे. (भाज्य संख्येचा पहिला अंक × पूरक)

गेल्याच भागातले हे गणित असले तरी परत इथे सोडवून दाखवत आहे. भाजक 899 = नवभाजक 101 हे आता सांगायला नको.

101)	1	1	1	4 (
+		1	0	1
	1	2	1	5

उत्तर भाग 1 बाकी 215

आता भाजक संख्येपेक्षा भाज्यात दोन अंक जादा असणारा भागाकार करायला घेऊ. त्यात वर जशी बेरीज घेतली तशी घेऊन झाल्यावर त्या बेरजेतला दुसरा अंक व पूरक यांचाही गुणाकार जादा करावा लागेल.

हे खरे तर परावर्त्य पद्धतीतही आपण करीत आलो आहोत. त्यात नवीन काहीच नाही. आपला नियमच आहे. **डावी बाजू उर्फ भाग यातल्या प्रत्येक अंक - स्तंभातल्या अंकाने गुणून झाल्याशिवाय भागाकार संपला असे मानायचे नाही.**

उदा. 200168 ÷ 8889 = किती ?

8889 = पूरक 1111

	1111) 20		0	1	6	8 (
	+ 2		2	2	2	
डाव्या बाजूतला दुसरा अंक 2 × पूरक घ्या व	22		2	3	8	8
तिसऱ्या अंकापासून मांडा.			2	2	2	2
बेरीज केली. एका स्तंभात एकच अंक ठेवा आणि	22		4	5	10	10
जादा अंक डावीकडे मिळवत चला	22		4	6	1	0

उत्तर भाग 22 बाकी 4610

भाग 1 मध्ये आपण एक सोपी रीत वापरली होती. ती इथेही वापरता येईल. पूरक व भाग विभागातला डावीकडून दुसरा अंक यांचा पुरा गुणाकार मांडून दुसऱ्या टप्प्यात बेरीज घेता येईल.

अंकशः स्तंभास्तंभात मग अंक मांडायला नकोत व जादा अंक स्तंभात आला तर तो डावीकडच्या स्तंभात ओढूनही घ्यायला नको. हा बघा तो 'शॉर्टकट'. पुन्हा हेच उदाहरण शॉट कटने घेऊ.

उदा. 200168 ÷ 8889

	पूरक -	1111
	1111) 20	0 1 6 8 (
पूरक × 2	2	2 2 2
(=2222)	22	2 3 8 8
पूरक × 2		
(=2222)		2 2 2 2
	22	4 6 1 0

मधले आकडे बदलले. स्तंभ घ्यावे लागले नाहीत. पण 1111 × 2 हा गुणाकार डोक्यात करून घेऊन एकदम मांडावा लागला. असेच झटपट आणखी एक उदाहरण सोडवू या. मात्र ते स्तंभ घेऊन व स्तंभ न घेता असे दोन्ही पद्धतीनी सोडवून बघू या. उदा. 12543 ÷ 887 = किती ?

स्तंभ पद्धत	पूरक × अंक पद्धत
887 = 113 पूरक	887 = 113 पूरक

113)	12		5	4	3 (
+	1		1	3	
	13		6	7	3
			3	3	9
	13		9	10	12
	13	1	0	1	2
	+1		1	1	3
	14		1	2	5

113) 12		5 4 3 (
	1	1 3
	13	6 7 3
+		3 3 9
	13	10 12
+	1	
(वजा मूळ भाजक)		- 8 8 7
	14	1 2 5

भाग 3

भाजक संख्या किती अंकांची व भाज्य संख्या किती अंकांची याची खरं तर काळजीच करायचे कारण नाही.

कारण दोन्हीत जेवढ्या अंकांचा फरक असेल तेवढे गुणाकार केल्यानेच भागाकार क्रिया संपत असते. हे लक्षात असेल तर कुठलेही गणित निखिलं पद्धतीने तुम्ही सोडवावयास घेऊ शकता.

रीत सर्वत्र एकच आहे. ती पुनः पुन्हा न देता जितकी गणितं आपण देता येतील तेवढी देऊ. तुम्ही ती पायरी पायरी समजावून घेऊन वाचा. भागाकारावर प्रभूत्व आपोआप प्राप्त होईल. भाग बाजूकडे जास्त अंक (म्हणजेच जास्त वेळा गुणाकार आवश्यक) अशी भागाकाराची गणिते आपण घेणार आहोत.

हा भागाकाराचा प्रगत भाग आहे. त्यामुळे भागाकार क्रिया थोडी खूप पायऱ्यांची वाटेल. पण भागाकारही तसेच मोठे आहेत हे लक्षात घेता, दर पायरी खूपच सोपी असते हेही लक्षात घेता व अन्य कुठल्याही रीतीने भागाकार येथे दिलेल्या पद्धतीपेक्षा अवघडच राहील हेही पाहता, इथे दर गणित घेत असलेली जागा पूर्ण समर्थनीय आहे. चला तर सोडवू या असे मोठे भागाकार. वेगळ्या शब्दात, असे भागाकार की जेथे भाज्य संख्या भाजकसंख्येपेक्षा खूपच जादा अंकांची बनलेली असते !

उदा. 10013 ÷ 89 = किती ?

इथे फरक तीन अंकांचा आला. म्हणजे तीन गुणाकार घ्यावे हे सुरवातीलाच आपल्याला कळले. तेवढे झाल्याशिवाय भागणे पुरे झाले असे मानायचे नाही हेही कळले.

आता क्रम जरा उलट करू. स्तंभशः गुणाकार न घेता येथे आपण पूरक व भाज्याचा दर अंक यांचा गुणाकार मनात करून भागाकारात मांडत जाणार.

रीत व गणित असे होईल.

भाज्य संख्येतील अंकापेक्षा भाजकात तीन अंक कमी

रीत

भाज्य संख्येतील अंक उजवीकडून मांडू लागा. भाजकात जेवढे अंक तेवढे अंक मांडून झाले की पुढचे अंक थोडी मध्ये जागा सोडून डावीकडे मांडा. भाजकाचा 'पूरक' काढा. भाज्यसंख्येचा प्रथम अंक व पूरक यांचा गुणाकार घ्या. हा गुणाकार भाज्य संख्येखाली मांडायचा. पण पहिला अंक भाज्य संख्येच्या डावीकडून दुसऱ्या अंकाखाली लिहायचा. बेरीज घ्या. आता बेरजेचा डावीकडून दुसरा अंक व पूरक यांचा गुणाकार बेरजेखाली मांडायचा. पण मांडताना बेरजेचे पहिले 2 अंक सोडायचे. पुनः बेरीज घ्या. आता या बेरजेपैकी डाव्या भागातल्या बेरजेचा तिसरा अंक व पूरक यांचा गुणाकार या बेरजेखाली मांडायचा. पण मांडताना डावीकडून उजवीकडे, बाकी- विभागाच्या दर अंकाखाली अंक येईल अशा रीतीने मांडायचा. परत बेरीज करायची.

बेरजेतला डावा भाग म्हणजेच भागाकार. उजवा भाग म्हणजे बाकी !

ही रीत वाचताना क्लिष्ट वाटते. प्रत्यक्षात रीत एकदम सोपी आहे. आधीच्याच रीतीची ही केवळ पुनरुक्ती आहे.

उदा. 10013 ÷ 89

	पूरक =	11	
	11) 100	13 (	भाज्य संख्या अलग भागात.
+	11		पूरक × भाज्यसंख्येतील प्रथम अंक
	111	13	
+	1	1	पूरक × बेरजेतील दुसरा अंक
	112	23	
+		22	पूरक × नव्या बेरजेतील 3 रा अंक
	112	45	**उत्तर** भाग 112 बाकी 45

आपल्या पद्धतीप्रमाणे आता हे उदाहरण Classical पद्धतीने म्हणजे स्तंभ आखून घेऊन सोडवू या.

11)	1	0	0		1	3 (
गुणाकार क्र. 1 +		1	1			
	1	1	1		1	3
गुणाकार क्र. 2 +			1		1	
	1	1	2		2	3
गुणाकार क्र. 3					2	2
	1	1	2		4	5

दोन्ही गणिते पद्धत बदलली तरी तेच आकडे देत आहेत व उत्तरही तेच येत आहे.

हे गुणाकार लिहिताना त्यांची स्थाने वेगवेगळी आहेत हे लक्षात ठेवा.

1 ला गुणाकार - भाज्यसंख्येतील 2 ऱ्या अंकाखालून सुरवात.

2 रा गुणाकार - बेरजेतील 3 ऱ्या अंकाखालून सुरवात.

3 रा गुणाकार- बेरजेतील 4 थ्या अंकाखालून सुरवात.

एकदा हे नीट कळले की खालचा प्रचंड भागाकार देखील तुम्हास सोपा सोपा वाटेल.

उदा. 11111114 ÷ 99979

भाजक 99979

पूरक 00021 (शून्ये लिहाच. त्यामुळे स्थान कळते)

00021)	1	1	1	1	1	1	1	4 (
+		0	0	0	2	1		
	1	1	1	1	3	2	1	4
+			0	0	0	2	1	
	1	1	1	1	3	4	2	4
				0	0	0	2	1
	1	1	1	1	3	4	4	5

उत्तर भाग 111 बाकी 13445

उदा. 11003 ÷ 89 (भाजक 89 चा पूरक 11)

11)	1	1	0	0	3 (
		1	1		
	1	2	1	0	3
			2	2	
	1	2	3	2	3
+				3	3
	1	2	3	5	6 उत्तर 123/56

उदा. 21011530 ÷ 89989 = किती ? (पूरक 10011)

10011)	2	1	0	1	1	5	3	0 (
+		2	0	0	2	2		
	2	3	0	1	3	7	3	0
+			3	0	0	3	3	
	2	3	3	1	3	10	6	0
+				3	0	0	3	3
	2	3	3	4	3	10	9	3
	2	3	3	4	4	0	9	3

उत्तर भाग 233 बाकी 44093

***

प्रकरण ९

केवळ एक - दोन ओळीत भागाकार

पाठ 1

भाज्य खंडच बदलून घ्या.

प्रथम एक सोपे उदाहरण घेऊ. 318330 ला 131 ने भागून उत्तर दोन दशांशस्थळापर्यंत बरोबर काढा. तुम्ही म्हणाल, 'हे तर फारच बिकट उदाहरण आहे. 'सोपे' हा शब्द 131 या भाजकाला उद्देशून वापरला आहे. द्रुत-गणिताचे भाषेत ज्या भाजकाचे सुरवातीचे दोन अंकांनी बनलेला आकडा,ज्यांचा पाढा आपल्याला तोंडपाठ येतो, अशांपैकी एक असेल तो 'सोपा भाजक' होय. 131 पैकी 13 हा आकडा असा आहे. म्हणून 131 हा सोपा भाजक होय. आता प्रत्यक्ष उदाहरणाकडे वळू.

पायरी 1

प्रथम उदाहरण लिहून घेताना त्यातील भाज्य संख्येचे अंक जरा अलग, अलग मांडायचे. जसे,-

1 3 1) 3 1 8 3 3 0 (

पायरी 2

भाजक 131 चे 13 व 1 हे दोन भाग करायचे. पहिला 13 हा सुभाजक. 1 शेषभाजक. तसेच शेषभाजक म्हणून ठरविलेल्या अंकांइतकी स्थळे दशांश चिन्ह डावीकडे सरकवा. येथे शेष-भाजकात एकच अंक आहे. म्हणून

चिन्ह एक घर सरकवले.

13   1)31833.0(

पायरी 3

जेव्हा पूर्ण भाग जाणार नसेल तेव्हा ते उत्तर दशांशात निघेल. पण प्रत्यक्षात सारी स्थळे काढावयास लागत नाहीत. उत्तर जितक्या **दशांश** स्थळापर्यंत बरोबर हवे असेल तितकी शून्ये वा अंक दशांश चिन्हाचे उजवीकडे भाज्य संख्येत हवीत. भाज्यसंख्या तशी करून घ्या. येथे दोन दशांश स्थळापर्यंत उत्तर बरोबर हवे आहे. तेव्हा भाज्य असे होईल -

13 1)31833.00(

पायरी 4

सुभाजक 13 ने 3183300 मधील 31 ला भागायचे. **उत्तर** 2/5. (येथे 2 हा भाग व 5 ही बाकी आहे.)

2 उत्तराचे जागी लिहून बाकी 5 भाज्यसंख्येच्या खालच्या ओळीत पुढच्या (म्हणजे 31 नंतरच्या) आकड्याच्या डावीकडे येईल अशा रीतीने लिहावयाची. अशी बाकी लिहावयास येण्यासाठीच पायरी 1 मध्ये भाज्य संख्येचे अंक एकमेकास चिकटून न लिहिण्यास सुचवले आहे. बघा -

13   1) 3̌ 1̌ 8 3 3 . 0 0 (2

5

या ठिकाणी बाकी 5 व भाज्य संख्येचा पुढचा अंक 8 यांची मिळून 58 ही संख्या डोळ्यापुढे आणा. या 58 ला 'नवसंख्या' म्हणायचे. तसेच भाज्य संख्येतील जितक्या अंकांचा भागाकारात विचार होऊन गेला त्यांचे डोक्यावर एखादी खूण करावयाची.

पायरी 5

आता 58 या नवसंख्येला भागायचे का ? नाही ! भाजक म्हणून पूर्ण गणित होईतो आपण 13 च वापरणार आहोत. मात्र भाज्य म्हणून 58 घेण्यापूर्वी त्यातून काही वजा करावयाचे आहे. त्यास 'द्वंद्व' म्हणू या. उत्तराचा आधीचा काढलेला अंक गुणिले शेष- भाजकाचा 1 ला अंक = द्वंद्व. 2 × 1 = 2. (1) हा शेषभाजक आहे. (2) उत्तराचा अंक आहे. 58 या नवसंख्येतून हे द्वंद्व उर्फ 2 वजा केल्यावर येते ते 'नवभाज्य'. 58 ऐवजी 56 ला 13 ने भागू.

56 ÷ 13 = 4/4, यातले 4 उत्तरात लिहा. बाकी 4 भाज्य संख्येच्या खालच्या ओळीत (म्हणजेच बाकींच्या ओळीत) 3 चे पुढ्यात लिहा. भागाकारात 8 हा अंक वापरून झाला .म्हणून त्यावर आता टिक् द्या. बघा -

13 1) $\check{3}\,\check{1}\,\check{8}\,3\,3\,.\,0\,0$ (24
5 4

पायरी 6

नव भाज्य कसे घ्यावयाचे हे समजले का ? 43 या नवसंख्येतून नवे नवभाज्य कसे काढाल ? 43 - द्वंद्व = नवभाज्य. द्वंद्व = 4 × 1 = 4. म्हणून नवभाज्य = 43 - 4 = 39. आता या 39 ला 13 ने भागून उत्तराचा पुढचा अंक निघेल. 39 ÷ 13 = 3/0. 3 उत्तरात लिहा. 0 बाकी भाज्य-संख्येच्या खालच्या ओळीत लिहा. भाज्य-संख्येतील ३ वर आता टिक् मारून टाका. नवसंख्या 03 येईल. तीतून द्वंद्व = 3 × 1 = 3 वजा करायचे. 03 - 3 = 0. नवभाज्य म्हणून आता ० मिळाले. बघा.

13 1) $\check{3}\,\check{1}\,\check{8}\,\check{3}\,3\,.\,0\,0$ (243
5 4 0 बाकींची ओळ

आता या नवभाज्याला 13 ने भागावयाचे.

0 ÷ 13|0/0 **(शून्याला कसेही भागा. भाग शून्याचा व बाकी शून्यच येते.)** उत्तरात शून्य लिहा. बाकी 0 'बाकीचे ओळीत' म्हणजे खाली लिहिली. भाज्य-संख्येतील दशांशचिन्हाच्या अलिकडचे 3 घेऊन झाले म्हणून त्यावर टिक् केली.

उत्तरात आता दशांशचिन्ह घ्या.

13 1) $\check{3}\,\check{1}\,\check{8}\,\check{3}\,\check{3}\,.\,0\,0$ (2430·
5 4 0 0 बाकींची ओळ

पायरी 7

नवसंख्या 00 आली. त्यांतून द्वंद्व म्हणून 0 × (1) = 0 वजा केले. उत्तर 0 च . 0 ÷ 13 = 0/0. उत्तरात 0 नि बाकीच्या ओळीतही परत 0 च मांडले. बघा -

13 1) $\check{3}\,\check{1}\,\check{8}\,\check{3}\,\check{3}\cdot\check{0}\,0$ (2430.0
5 4 0 0 0 बाकींची ओळ

पायरी 8

नवसंख्या = 00. द्वंद्व = 0. नवभाज्य = 0. 0 ÷ 13 = 0/0. उत्तरात 0 नि बाकीच्या ओळीत 0 च. भाज्यातील शेवटच्या शून्यावर टिकू द्या. बघा -

13   1) $\check{3}\ \check{1}\ \check{8}\ \check{3}\ \check{3}\ \cdot\ \check{0}\ \check{0}$ (2430.00

5 4 0 0 0 0   बाकींची ओळ

उत्तर 318330 ÷ 131 = 2430.00

एवढ्या पायऱ्या केवळ विषयाचे समजुतीकरिता दिल्या. एकदा का विवेचन नीट समजले की. तुम्ही 318330 ÷ 131 हा भागाकार केवळ दोन ओळींत मांडून करू शकाल -

13   1) $\check{3}\ \check{1}\ \check{8}\ \check{3}\ \check{3}\ \cdot\ \check{0}\ \check{0}$ (2430.00

5 4 0 0 0 0   बाकींची ओळ

खालील तक्ता पुन्हा एकदा नीट पाहून उदाहरण कसे सोडिवले ते परत वाचा. भागाकारातील पहिला भाग देताना जे पहिले एक-दोन आकडे घेतो त्यातून द्वंद्व म्हणून शून्य वजा केले आहे.

			समान सुभाजक = 13			
1	2	3	4	5	6	7
उत्तर	नवसंख्या	द्वंद्व कसे काढले ?	द्वंद्व	नवभाज्य (2-4)	उत्तरातला अंक	बाकी
1 ला अंक	31	0× 1	0	31	2	5
2 रा अंक	58	2× 1	2	56	4	4
3 रा अंक	43	4× 1	4	39	3	0
4 था अंक	03	3× 1	3	0	0	0
5 वा अंक	00	0× 1	0	0	0	0
6 वा अंक	00	0× 1	0	0	0	0

सराव

उदा. 8540 × 94 = ?

9 4) $\check{8}\ \check{5}\ \check{4} \cdot \check{0}\ \check{0}$ (90.85

4 8 8 3

पायऱ्या

1) 8 5 – 0 = 85. 85 ÷ 9 = 9/4

2) 44 – (9× 4) = 8. 8 ÷ 9 = 0/8

दशांश चिन्ह मांडले.

3) 80 – (0× 4) = 80. 80 ÷ 9 = 8/8

4) 80 – (8× 4) = 48

48÷ 9 = 5/3

उत्तर 90.85

उदा. 4529 ÷ 73 = ?

7 3) $\check{4}\ \check{5}\ \check{2} \cdot \check{9}\ \check{0}$ (62.04

3 0 3

पायऱ्या

1) 45 ÷ 7 = 6/3

2) 32 – (6 × 3) =14

14 ÷ 7 = 2/0

3) 09 - (2 × 3) = 3

3 ÷ 7 = 0/3

4) 30 - (0 × 3) = 30

30 ÷ 7 = 4/2

उत्तर 62.04

उदा. 82) 89149 (..... ?

8 2) $\check{8}\ \check{9}\ \check{1}\ \check{4} \cdot \check{9}\ \check{0}$ (1087.18

0 7 7 2 7 4

पायऱ्या

1) 8 ÷ 8 = 1/0

2) 09 – 2 = 7; 7 ÷ 8 = 0/7

3) 71 – 0 = 71; 71÷ 8 = 8/7

4) 74 – 16 = 58 ; 58÷ 8 = 7/2

5) 29 – 14 = 15; 15 ÷ 8 = 1/7

6) 70 –2 = 68; 68 ÷ 8 = 8/4

उत्तर 1087.18

अभ्यास

1) 38982 ÷ 73 2) 16384 ÷ 128
3) 7632 ÷ 94 4) 529 ÷ 23

उत्तरे

1) 534 2) 128 3) 81.19 4) 23.00

सूचना अभ्यास करताना दिलेल्या उदाहरणांचाच पुनः पुन्हा सराव करावा. सराव पूर्ण झाला व त्या त्या विषयाचा अंतिम पाठ शिकून झाला की, नंतर मात्र स्वतंत्रपणे उदाहरणे तयार करून ती सोडवून पाहणे आवश्यक आहे.

पाठ 2

एक खालचा भाग लावून पाहण्याची गरज

येथे या द्रुतगती भागाकारातील एका क्वचित आड येणाऱ्या समस्येवर विचार केलेला आहे.

समजा, नवसंख्येतून जे द्वंद्व वजा करावयाचे ते नवसंख्येपेक्षा मोठे आले तर ? नवसंख्या तरी बदलायला हवी वा द्वंद्व तरी बदलायला हवे.

एक खालचा भाग देऊन बघा. नवसंख्याही बदलेल नि द्वंद्वही बदलेल.

ही क्रिया बिलकुल कठीण नाही. वरपांगी जी या सुचविलेल्या युक्तीत क्लीष्टता वाटते ती, प्रत्यक्ष उदाहरण करून पाहता, उगीचच वाटली हे पटेल.

उदाहरण 16281 ला 39 ने भागा. उत्तर दोन दशांश स्थळापर्यंत बरोबर हवे.

पायरी 1

39 चा पाढा नाही आला तरी 3 चा पाढा येतोय ? 39 चे 3 हा सुभाजक व 9 हा शेषभाजक असे दोन भाग कल्पिले. शेषभाजक जरासा दूर दाखवला. शेषभाजकात एकच अंक. म्हणून दशांशचिन्ह एक घर डावीकडे घेतले. उत्तर दोन दशांशापर्यंत अचूक पाहिजे. म्हणून दशांश चिन्हाचे उजवीकडे शून्य वापरून दोन अंक करून घेतले. मघाच्या उदाहरणापेक्षा (131 पेक्षा) हा भाजक (39) कशाने वेगळा आहे बरे ? येथे सुभाजक (3) फार छोटा आहे. व शेषभाजक (9) फार

मोठा आहे. अगदी 131 पेक्षा उलट. म्हणूनच या गणितात सतत एक खालचा भाग लावून पाहात राहण्याची वेळ येत राहणार आहे. भागाकार असा होईल -

3 9) 1 6 2 8 . 1 0 (5
1 4

16 ÷ 3 = 5/1. परंतु पुढचा भाग देऊन पाहताना अडचणी सुरू होतील. बघा - 12 – (5 × 9 = 45.) 12 तून 45 कसे वजा जाणार ? म्हणून 5 ऐवजी 4 चा भाग देऊन पाहाणे आवश्यक आहे. 16 ÷ 3 = 4/4.

3 9) 1 6 2 8 . 1 0 (5
1 4
4

(खालचा भाग दिल्यावर तोही भाग पहिल्या भागाचे बरोबर खालीच लिहा. बाकीचेही तसेच. खालचा भाग दिल्याने बदललेला नव्या बाकीचा अंक आधीच्या काट मारलेल्या अंकाचे बरोबर पायाशी, जणु बाकीची दुसरी ओळ मानून, लिहावयाचा.)

पायरी 2

नवसंख्या 42 – द्वंद्व (4 × 9 =) 36 = नवभाज्य 6. 6 ÷ 3= 2/0.

3 9) 1 6 2 8 . 1 0 (5 2
1 0 4
4

परंतु 08 मधून द्वंद्व म्हणजे (9 × 2 =) 18 कसे वजा जाणार ? म्हणून 2 ऐवजी 6 ला 3 ने भागतांना एक खालचा भाग देऊन पाहू. 6 ÷ 3= 1/3.

3 9) 1 6 2 8 . 1 0 (5 2
1 0 4 1
4 3

पायरी 3

नवसंख्या 38 - द्वंद्व (9 × 1 =) 9 = नवभाज्य 29. 29 ÷ 3 = 9/2. 9 उत्तरात, 2 बाकीचे जागी. आता येथे सरावाने व अंदाजाने 9 चा भाग देणे योग्य का नाही ते कळेल. बाकी 2 ने भाज्य (16281) पैकी 1 मिळून जी नवसंख्या 21 मिळणार ती नक्कीच 9 × 9 = 81 पेक्षा छोटी असणार. म्हणजेच 21 मधून 81 हे द्वंद्व वजा जाणार नाही हा अंदाज 9 चा भाग न

देताच आला. मग 9 उत्तरात व २ बाकीचे जागी लिहिले ते बदलून 8 चा भाग का देऊन पाहू नये ? 29 ÷ 3 = 8/5.

```
3   9)1628.10(5 2 9
        1 0 2     4 1 8
        4 3 5
```

परंतु त्याच प्रकारच्या सरावाने वा अंदाजाने आपल्याला येथेच जाणावयाला हरकत नाही की 8 चा भाग दिला की द्वंद्व 72 मिळणार (8 × 9) व ते 51 मधून वजा जाणारच नाही. 1 भाग आणखी खालचा देणे आले. 29 ÷ 3 = 7/8.

```
3   9)1628.10(5 2 9
        1 0 2     4 1 8
        4 3 5         7
            8
```

पायरी 4

81 – 63 = 18. 18 ÷ 3 = 6/0. 6 उत्तरात व 0 बाकीचे जागी लिहा. पण तत्पूर्वी दशांश चिन्ह कुठे घ्यायचे याचा नियम ठरवू. **भाज्यातील दशांश चिन्हाचे डावीकडील सर्व अंक भागाकारात घेऊन झाले असतील तर आधी दशांश चिन्ह घेऊन मगच भागाकरातला पुढचा उत्तराचा अंक लिहावयाचा. येथे भाज्यातले दशांश चिन्ह ओलांडत आहोत. तेव्हा भागाकारात दशांश चिन्ह मांडा व पुढे भाग 6 मांडा.**

```
3   9)1628.10(5 2 9.6
        1 0 2 0   4 1 8
        4 3 5         7
            8
```

पायरी 5

येथे नवसंख्या 00 आली आहे. त्यातून काहीच वजा जाणार नाही. आता 6 चा भाग तर नक्कीच बदलायला लागणार. चला, मनातल्या मनात एकेक खालचा भाग देऊन बघत राहू.

18 ÷ 3 = 5/3. नवसंख्या 30 - द्वंद्व (9 × 5=) 45. येथे 45 हे 30 मधून कसे वजा जाणार ? चला आणखी एक खालचा भाग देऊ. 18 ÷ 3 = 4/6.

3 9)1628.10(5 2 0. 6
4 0 2 0 4 1 8 . 5
4 3 5 3 7 . 4
8 6

नवसंख्या 60 - द्वंद्व 36 = नवभाज्य 24; 24 ÷ 3 = 8/0

3 9)1628.10 (5 2 0 6 8
4 0 2 0 4 1 8 5
4 3 5 3 7.4
8 6

24 ÷ 3 = 8/0 पैकी 0 बाकी बाकीच्या ओळीत लिहू लागताना भाज्यांतले अंक संपल्याचे ध्यानात आले. परंतु दशांश चिन्ह एकदा पार केले की पुढे संख्येत कितीही शून्ये मांडली तरी संख्येची किंमत बदलत नसते हे आठवले. तेव्हा पुढे आणखी एक 0 कल्पून नवसंख्या 00 कल्पायला काय हरकत आहे ? आणखी एक एवढ्या अनुभवाने कळले आहे की बाकी 0 आली की नवसंख्या छोटीच बनते. तेव्हा बाकी 0 येताच खालचा भाग लावून पहावयाचे नक्कीच ठरले. बघू या आधीचं खालचा भाग लावून. 24 ÷ 3 = 7/3. बाकी 3 च्या पुढे 0 जोडले तर नवसंख्या 30 मिळणार. तीमधून 63 (7 × 9) वजा कसे जाणार ? पुनः खालचा भाग लावणे आले. 24 ÷ 3 = 6/6. नवसंख्या 60 - द्वंद्व 54 (6 × 9) = 6. तेव्हा 6 चा भाग नक्की करून टाकायला व गणित संपवायला हरकत नाही. कारण 2 दशांश स्थळे अचूक उत्तर मिळाले.

3 9)1628.10 (5 2 0 . 6 8
4 0 2 0 0 4 1 8 5 7
4 3 5 3 6 7 4 6
8 6

पायरी 6

उत्तरातले अंतिम अंक असे आले - 4, 1, 7, 4, 6.

16281 ÷ 39 = 417.46 उत्तर.

(हे एक अवघड उदाहरण खालचा भाग देण्याची कल्पना समजावी म्हणून मुद्दाम योजिले. प्रत्यक्षात खालचा भाग 1-2 वेळाच लावण्याची वेळ येते !)

खालचा भाग केव्हा केव्हा लावून पहावा :

1) जेव्हा भाग दिल्यावर येणारी बाकी 0, 1, 2 अशी फार लहान असेल.

2) त्याच वेळी शेष भाजक 8, 9 असा मोठा असल्याने द्वंद्वही मोठी संख्या

येण्याची खात्री असेल.

नवसंख्या व द्वंद्व पट्कन डोळ्यांपुढे आणून द्वंद्व नवसंख्येपेक्षा लहान येणार नाही असे वाटताच खालचा भाग द्यावा.

सूचना :

दर वेळेस खालचा भाग लावून पाहावा लागतो असे मुळीच नाही. आधीच्या उदाहरणात एकदाही खालचा भाग लावून पाहण्याची पाळी आली नाही. तरीही सराव करताना मुद्दाम 9 ने वा 8 ने शेवट होणारे 2-3 अंकी भाजक घ्या. म्हणजे 'खालचा भाग लावणे' ही क्रिया 'हातचा मळ' होईल.

सराव

6380215 ÷ 166 = ? (एक दशांश स्थळापर्यंत उत्तर काढा.)

एका ओळीत उत्तर

$166)63\ {}_{15}\ 8\ {}_{12}\ 0.\ {}_{8}\ 2\ {}_{10}\ 1.{}_{3}5\ (38435.0$

उत्तर 38435.0

बघा, किती सोपे आहे हे सारे !

पाठ 3

तीन आकडी संख्यांनी कसे भागावे ?

उदा. 7445 ÷ 432 = ? (उत्तर 2 दशांश स्थळापर्यंत हवे.)

या ठिकाणी 131 मध्ये 13 मूळ सुभाजक म्हणून घेतला तसा 43 घेता येणार नाही. 4 घेतला तर शेषभाजक दोन अंकी येईल. (4 **3 2**) त्यामुळे दर वेळी नवसंख्येतून आतापर्यंत आपण एक द्वंद्व वजा करीत आलो, त्याऐवजी 2 द्वंद्वे वजा करावी लागतील. जितके शेषभाजकात अंक जास्त तितकी वजा करावी लागणारी द्वंद्वे अधिक.

	द्वंद्व 1	द्वंद्व 2	एकूण वजा
जेव्हा शेषभाजक दोन अंकी असेल तेव्हा. उदा. 4 32	शेषभाजकाचा डावीकडून पहिला अंक (3) (×) भागाकाराचा पहिला अंक	शेषभाजकाचा डावीकडून दुसरा (2) (×) भागाकाराचा दुसरा अंक	1 ल्या व 2 ऱ्या गुणाकारांची बेरीज करावी लागेल.

जर उदाहरण 7445 ÷ 4321 असले तर 3 द्वंद्वे असती, इतकेच.

एकदा कुठला भाग व शेषभाजकातला कुठला अंक यांचा गुणाकार करावयाचा हे नीट समजले व दरवेळी किती गुणाकारांचे (द्वंद्वांचे) बेरजेने वजा करावयाचा आकडा बनेल हे कळले की या द्रुतगती पद्धतीने कितीही मोठ्या संख्येस दुसऱ्या कितीही मोठ्या संख्येने एका ओळीत भागता येते.

जरा बदल म्हणून पायऱ्या न देता हाच भागाकार तक्त्याचा उपयोगाने करू या.

उदा. 7445 ला 432 ने भागून उत्तर 2 दशांश स्थळापर्यंत काढा.

तक्ता

सुभाजक = 4 शेषभाजक = 32

भागाकारातील अंकाचा क्रम	नव-संख्या	द्वंद्व 1	द्वंद्व 2	द्वंद्व 1+ 2 ची बेरीज	नव भाज्य	भाग व बाकी
1 ला	7	–	–	–	7	1/3
2 रा	34	3× 1 = 3	–	3	31	7/3
3 रा	34	3× 7 = 21	2× 1 = 2	23	11	2/3
4 था	35	3× 2 = 6	2× 7 = 14	20	15	3/3

गणित असे होईल 4 32) 7 4 . 4 5 0 (17.23

3 3 33

हे उदाहरण तुम्ही स्वतः करून बघा - तक्ता लिहून व तक्ता न लिहिता !

उदा. 194115 ÷ 937 (उत्तर 1 दशांश स्थळापर्यंत पुरे.)

```
9   37 ) 1  9  4  1 . 1  5 ( 207 . 2 7
             1  8  4  2  8        1 6
                     11  9
```

पायऱ्या

1) 19 ÷ 9 = 2/1 ·

2) 14 - (2 × 3) = 8 + 9 = 0/8

3) 81 - { (0 × 3) + (2 × 7) }= 67 ÷ 9 = 7/4

7 नंतर दशांश चिन्ह द्यायचे.

4) 41 - { (7 × 3) + (0 × 7) }= 20 ÷ 9 = 2/2

5) 25 – (द्वंद्वे वजा जाणार नाहीत.)

खालचा भाग लावणे आले. 20 ÷ 9 = 1/11

115 - { (1 × 3) + (7 × 7)} = 63 ÷ 9 = 7/0

6) 00 - (कुठलेच द्वंद्व वजा जाणार नाही) म्हणून ६३ ÷ 9 = 6/9.

90 - {(6 × 3) + (1 × 7)} = 65 ÷ 9

(परंतु उत्तर 1 च दशांश स्थळ हवे. तेव्हा हा भाग न देताच थांबू.)

उत्तर 194115 ÷ 937 = 207.16

भाजक तीन अंकी असेल तर 'दोन ओळीत भागाकार' करण्याची आणखी सोपी रीत :

जर तीन अंकी संख्येचे पहिले दोन अंक ज्या संख्येचे पाढे आपल्याला येतात अशी संख्या बनवत असतील तर वरची पाठ - 1 ची रीत लागू पडते. कारण त्यात शेष-भाजक एक अंकी संख्याच राहतो.

उदाहरणे :- 172, 229, 297 वगैरे.

या संख्यांत शेष-भाजक अनुक्रमे 2, 9, 7 असा एक अंकीच राहील. व सुभाजक 17, 22, 29 म्हणजेच ज्यांचे पाढे आपल्याला पाठ असण्याची अपेक्षा आहे अशा प्रकारचा राहील.

पण तीन अंकी भाजकाचा हा प्रकार बघा.

932, 836, 481

ह्या उदाहरणात सुभाजक 93, 83, 48 (अनुक्रमे) ठरवून भागाकाराची द्रुत-रीत वापरणे शक्य होईल का ? अवघड आहे. कारण ९३, ८३ वगैरेचे पाढे आपल्याला येत नाहीत. मग हे सुभाजक सोपे भाजक या संज्ञेला पात्रच कसे होणार ?

तसे सुभाजक मिळवायचे तर ह्या संख्यांच्या अंकांची सुभाजक व शेष-भाजक अशी विभागणी आपणास खालीलप्रमाणे करावी लागेल.

9 32, 8 36, 4 81

वर म्हटले आहे की शेष-भाजकात जेवढे अंक तेवढीच द्वंद्वे (भागाचा अंक × शेषभाजकाचा अंक द्वंद्वशः काढून, त्यांची बेरीज करून ती बेरीज दरवेळेस नवसंख्येतून वजा करून मगच नवभाज्य मिळेल.

ही दोन - दोन द्वंद्वे काढून त्यांची बेरीज करण्यासाठी आता एक अभिनव व सोपी रीत शिका. **एकमेकांच्या विरूद्ध (पण तिरक्या दिशेत) असलेल्या अंकांचा गुणाकार करणे व त्यांची बेरीज करणे.** तक्ता वापरण्याच्या ही पुढची पायरी आहे.

उदा.

1 ली संख्या	20	07	71	16
	X	X	X	X
2 री संख्या	37	37	37	37
उत्तरे -	14	21	52	25

रीत :	(3 × 0) +	(0 × 7) +	(3 × 1) +	(1 × 7) +
	(2 × 7)	(3 × 7)	(7 × 7)	(3 × 6)

वरच्या द्रुत भागाकाराच्या रीतीत आपण 2 द्वंद्वांची बेरीज म्हणतो व ती बेरीज नवसंख्येतून वजा केल्याशिवाय नवभाज्य मिळणार नाही असे म्हणतो. तिरक्या बेरजांचा उपयोग करून वरच्याच उदाहरणात आकडे-मोड आणखी सोपी कशी होते ते खाली पाहा.

उदा. 194115 ÷ 937 = किती ?

(उत्तर दोन दशांश स्थळापर्यंत अपेक्षित)

वर हे उदाहरण तिरक्या गुणाकारांचा वापर न करता सोडवलेलेच असल्याने 'पूर्ण सोडवलेले' गणित खाली पुन्हा जसेच्या तसे लिहून घेऊ. म्हणजे त्याकडे पाहात पाहात नव्या पायऱ्या तुम्हास सहजी आकलन होतील.

937) 1 9 4 1 . 1 5 0 0 (207.~~2~~~~7~~ 7
1 8 4 ~~2~~ ~~0~~ 16
11 9

उत्तर : 2 0 7 . 1 6.

या गणितात तिरके गुणाकार आणावे लागतील. त्यासाठी दोन अंकी दोन संख्या लागतात. या भागाकारात या दोन संख्यापैकी एक 37 (म्हणजेच शेष भाजक) ही कायम असेल. दुसरी बदलती असेल. भाग म्हणून गणिताल उजवीकडे जे अंक आहेत त्यातल्या जवळजवळच्या दोन दोन अंकांची संख्या म्हणजे ही दरवेळी बदलणारी संख्या. तरेच पहिला भाग 2 चा दिला तेव्हा 'भाग' विभागात 2 च्या आधी अंकच नव्हता. या 2 चे मागे शून्य कल्पले की हीही दोन अंकी (02 अशी) संख्या होईल.

मघाच्याच गणिताच्या या नव्या पायऱ्या पाहा. रीतीच्या सोपेपणाने तुम्ही नक्की खूष होऊन जाल.

पायऱ्या

1) 19 ÷ 9 =2/1; (2 उत्तरात.); 1 दुसऱ्या ओळीत; नवसंख्या 14. आता प्रथम तिरके गुणाकार काढून मग ते नवसंख्येतून वजा करीत नवभाज्ये काढणे वगैरे गणित क्रिया होत राहतील व उत्तराचा एकेक अंक मिळत राहील.

2) $\begin{matrix}02\\37\end{matrix}$ 6; 14-6 = 8; 8÷ 9 = 0/8; नवसंख्या 81.

3) $\begin{matrix}20\\37\end{matrix}$ 14; 81- 14 = 67; 67 ÷ 9 = 7/4; नवसंख्या 41.

4) $\begin{matrix}07\\37\end{matrix}$ 21; 41 - 21 = 20; 20 ÷ 9 = 2/2; नवसंख्या 25.

5) $\begin{matrix}72\\37\end{matrix}$ 55. 55 > 25. खालचा भाग घ्या.

20 ÷ 9 = 1/11; नवसंख्या 115.

6) $\begin{matrix}71\\37\end{matrix}$ 52; 115 - 52 = 63; 63 ÷ 9 = 7/0; नवसंख्या 00.

7) $\begin{matrix}27\\37\end{matrix}$ 35; 35 >00. खालचा भाग घ्या.

63 ÷ 9 = 6/9; नवसंख्या 90

8) $\begin{matrix}16\\37\end{matrix}$ 25; 90 - 25 = 65; 65 ÷ 9 = 7/2; नवसंख्या 20.

उत्तर 2 दशांश स्थळापर्यंतच हवे. तेव्हा पुढे जायचे कारणच नाही. तीन अंकी भाजकाचे भागाकार आता आणखीच सोपे होऊन गेले. आता शिका पुढची कमाल !

पाठ 4

येणारी बाकी दशांशात न काढता पूर्णांकात खरी बाकी कशी काढायची ?

रीत : भागत, भागत दशांश चिन्हापुढे एक नव-संख्या मिळेतो भागत जायचे. तसेच, भागाकार नेहमीप्रमाणे उजवीकडे न मांडता भाज्य संख्येच्या डोक्यावर आडवी रेघ देऊन त्या रेघेवर मांडावयाचा. दशांश चिन्हापुढच्या भाज्यातील सर्व अंकांचे डोक्यावर उत्तरासाठी ठेवलेल्या जागेत म्हणजे या आडव्या रेघेवर शून्ये मांडावयाची. नंतर उजवीकडून डावीकडे गणित करीत जायचे. भाज्यातला उजवीकडचा 1 ला अंक घ्यावयाचा. त्यातून सर्व शेषभाजक व तितकेच भागाकारातले आधीचे अंक यांच्या गुणाकारांची बेरीज वजा करावयाची की बाकीचा उजव्या टोकाचा अंक मिळेल ! नंतर, भाज्यातला उजवीकडून दुसरा अंक घ्यावयाचा. त्यातून मघाप्रमाणेच आधीचे भाग व शेषभाजकातील सर्व अंक यांच्या गुणाकाराची बेरीज वजा करावयाची. असेच (दशांश चिन्हापुढच्या) सर्व अंकांचे बाबतीत केले की खरी बाकी मिळते. शेवटचा चिन्हालगतचा अंक आधीच्या बाकीसकट घ्यावयाचा.

उदा. 9342 ने 116214572 ला भागल्यावर उत्तर 124440 आले व दशांश चिन्हाखाली 2 हा बाकीचा अंक आला तर संपूर्ण बाकी किती होईल ?

```
          124440.000
9342)116214.572(
                  2
```

चला, क्रिया-सूत्राप्रमाणे पुढे चालू या !

पायरी 1

दशांश चिन्हापुढच्या भाज्यातील दर अंकावर उत्तरासाठी ठेवलेल्या शिरोभागीच्या जागेत एकेक शून्य लिहा. आता भाज्य संख्येकडे उजव्या टोकाकडून बघा. 1 ला अंक = 2. त्यातून तीन द्वंद्वे वजा करा. 7, 5 व 4 च्या डोक्यावरचे उत्तराच्या जागेतील अंक (0, 0, 0) व **3, 4** आणि **2** हे शेषभाजकातले डावीकडून घेतलेले अंक यांचा गुणाकार म्हणजे ही 3 द्वंद्वे !

$$2 - \{ (3 \times 0) + (\mathbf{4} \times 0) + (\mathbf{2} \times 0) \} = 2$$

बाकीचा 1 ला अंक = 2

पायरी 2

आता उजवीकडून दुसरा अंक म्हणजे 7 उचलावयाचा.
$7 - \{ (\mathbf{3} \times 0) + (\mathbf{4} \times 0) + (\mathbf{2} \times 4) \} = \bar{1}$
बाकीचा 2 रा अंक = −1

पायरी 3

आता उजवीकडून शेवटचा, बाकी देणारा अंक म्हणजे 5.
येथे नवसंख्या म्हणून केवळ 5 न घेता पुरी नवसंख्या 25 घ्या.

```
                 1 2 4 4 4 0 . 0 0 0
 9   3 4 2 )  1 1 6 2 1 4 . 5 7 2 (
                            2
```

पायरी 4

$25 - \{ (\mathbf{3} \times 0) + (\mathbf{4} \times 4) + (\mathbf{2} \times 4) \}$
बाकीचा 3 रा अंक = 1

पायरी 5

बाकीचे अंक आपण उजवीकडून काढले. संपूर्ण बाकी $1\,\bar{1}\,2$ अशी झाली.

पायरी 6

येथे 'परिवर्तन क्रिया ज्ञान' उपयोगी येईल. $1\bar{1}2$ मधला मध्यवर्ती अंक 1 हा ऋण अंक आहे. त्याचे घन अंकात रुपांतर करावयास हवे. अन्यथा $1\bar{1}2$ ह्या बाकीचा अर्थच इतरांना कळायचा नाही. $1\bar{1}2 = 100 - 10 + 2$ म्हणजेच 92. $1\bar{1}2$ पाहून परिवर्तन क्रिया सूत्राने 92 कसे काढले ? $\bar{1}$ चे जागी $10 - 1 = 9$ लिहा. उणे 1 हातचा धरा. त्यात 112 मधला सुरुवातीचा अधिक 1 मिळवला की उत्तर 0 आले. म्हणजेच 092

उत्तर : 9342 ने 116214572 ला भागल्यावर 124440 हा भागाकार व 92 ही बाकी मिळेल. आहे की नाही ही पद्धत अद्‌भूत ?

उदा. 8540 ला 94 ने भागल्यावर भागाकार 90 येतो व शेवटची नवसंख्या 80 येते तर बाकी किती ? (भागफळ भाज्य संख्येच्या वर लिहा.)

पायरी 1

उदाहरण आपल्या पद्धतीने लिहून घेतले. नियमानुसार दशांश चिन्हालगतचा अंक (0) नुसता न घेता बाकीसकट घ्यावयाचा असल्याने नवसंख्या 80 ही आपली पहिली संख्या होईल.

```
       90.0
9 4)854.0(
        8
```

पायरी 2

80 मधून 4 च्या डोक्यावरचा अंक (म्हणजे 0) व शेष भाजक (म्हणजे 4) याचा गुणाकार वजा केला की बाकी मिळेल. 80 - (0 × 4 =) 0 = 80

उत्तर : 854 ला 94 ने भागल्यावर भागाकार 90 व बाकी 80.

उदा. 7445 ÷ 432 = भाग 17 व शेवटची नवसंख्या 34 येते तर बाकी किती असेल ?

पायरी 1

उदाहरण लिहून घ्या. दशांश चिन्हाच्या डावीकडच्या भाज्य अंकांवर भागाकाराचे अंक लिहावयाचे व उजवीकडच्या अंकांवर शून्ये लिहावयाची. दशांश चिन्हाखाली 3 लिहा. म्हणजे 34 नवसंख्या तयार होईल.

```
       17.00
4 32) 74.45 (
        3
```

पायरी 2

उजवीकडून 1 ला अंक 5 आहे. त्यामुळे या 5 मधून या पाचचे अलिकडील दोन्ही 'चार' वरचे अंक व शेष भाजकातले अंक यांचे गुणाकार वजा केले की बाकीचा उजव्या टोकाचा अंक मिळेल. 1 ल्या 4 चे डोक्यावर शून्य आहे. दुसऱ्या 4 चे डोक्यावर 7 आहे. म्हणून गणित असे होईल.

5 - { (0 × 3 =)0 + (7 × 2=)14} = 5 − 14 = - 9 = $\bar{9}$

पायरी ३

पुढचा अंक घ्या. पुढचा अंक = 4. परंतु हा दशांश चिन्हालगतचा अंक आहे. म्हणून हा बाकीच्या ओळीतल्या अंकासकट वाचायचा व त्याला नवसंख्या म्हणायचे. 4 = 34. या 34 मधून काय काय वजा होईल ? 34 च्या डावीकडचे अंक 4 व 7 यांच्या डोक्यावरचे अंक अनुक्रमे 7 व 1 यांचे **3** व **2** शी होणारे गुणाकार 34 मधून वजा केले की, बाकीचा उजवीकडून दुसरा अंक मिळेल.

$$34 - \{(7 \times \mathbf{3}) + (1 \times \mathbf{2})\} = 11$$

उजवीकडून नवसंख्येपर्यंत आल्यामुळे पुढे जाण्याचे कारण नाही. बाकी किती आली ? बाकी = 1 1 $\bar{9}$. उणे 9 चे अधिक अंकात रूपांतर करा. 9 = 1 व हातचा $\bar{1}$. हा उणे 1 शेजारच्या 11 मधून वजा करा. 101 बाकी मिळवा. साध्या भाषेत असे म्हणता येईल की $11\bar{9}$ म्हणजे + 110 आहेत व -9 आहेत. म्हणजेच एकूण फक्त 101 आहेत.

उत्तर बाकी = 101

पाठ 5

परिवर्तन क्रियेचा भागाकारात भाजक सोपा करून घेण्यासाठी उपयोग

उदा. 137294 ला झटपट 5749 ने भागायचे आहे. भाजक सोपा करून घेऊन उत्तर काढा.

पायरी 1

भाजक 5749 मधले सारे अंक परिवर्तन क्रियेने बदलता येतील व तरीही भाजक संख्येचे मूल्य बदलणार नाही. 5749 मधील 9 बदलू या. हे + 9

आहेत. त्याचे परिवर्तन उणे अंकात कसे करायचे ? परिवर्तन नियमाप्रमाणे 10 तून 9 वजा करा व + 1 हातचा म्हणून घ्या. कारण + 10 - 1 = 9. 5749 मधला 9 बदलला तर नवी संख्या $575\bar{1}$ अशी बनेल व तिची किंमत 5749 इतकीच असेल.

पायरी 2

या नव्या $575\bar{1}$ भाजकातही 7 हा अंक जरा मोठा आहे. तोही सोपा करून घेऊ. + 7 चे परिवर्तन करायचे म्हणजे 10 तून 7 वजा करायचा व +1 हातचा घ्यायचा. (हातचे साहजिकच डावीकडच्या अंकात मिळवले जातील.) नव्या $575\bar{1}$ मधला 7 बदलला तर पुरी संख्या $6\bar{3}5\bar{1}$ अशी होईल व तिची किंमतही मूळ भाजक संख्येइतकी म्हणजे 5749 इतकीच असेल.

प्रश्न असा, हे सारे परिवर्तन कशाकरिता करायचे ? उत्तर उघड आहे. जर भाजक 5 7 4 9 असाच ठेवला असता तर शेषभाजकात मोठमोठे अंक असल्याने नवसंख्येतून वजा करायची द्वंद्वे नवसंख्येपेक्षा मोठी येत राहिली असती व दरवेळेस खालचा भाग लावून पाहाण्याची दगदग पडली असती. चला आता या सोप्या भाजकाने द्रुतरीतीचा वापर करून भागाकार करू या.

पायरी 3

हे सबंध गणित पायरीपायरीने सोडविण्यापेक्षा सर्व पायऱ्यांचे स्पष्टीकरण देणारा तक्ता खाली देत आहे. $6\bar{3}5\bar{1}$ या सुधारीत भाजकात 6 हा सुभाजक आहे व $\bar{3}5\bar{1}$ हे शेषभाजक आहेत. पुरे गणित सोडवल्यावर खालीलप्रमाणे दिसेल.

$6\ \bar{3}\ 5\ \bar{1})\ 137.2940(\quad 23.8813$

1 5 3 2 5

शेषभाजकात उणे अंक आल्याने काही बिघडत नाही. द्वंद्व म्हणून येणाऱ्या संख्या उणे येतात व त्या नवसंख्येतून वजा करायच्या म्हणजे उणे चिन्हामुळे अधिक करायच्या असा अर्थ होतो.

तक्ता

द्वंद्व - 1	द्वंद्व - 2	द्वंद्व - 3	द्वंद्वांची बेरीज	नवसंख्या वजा द्वंद्वे
- -	- -	- -	- -	13 - 0
$2 \times \bar{3}$	- -	- -	$\bar{6}$	17 - 6
$3 \times \bar{3}$	2×5	- -	+ 1	52 - 1
$8 \times \bar{3}$	3×5	$2 \times \bar{1}$	$\bar{1}\,\bar{1}$	$39 - 1\,\bar{1}$
$8 \times \bar{3}$	8×5	$3 \times \bar{1}$	+ 13	24 - 13
$1 \times \bar{3}$	8×5	$8 \times \bar{1}$	+ 29	50 - 29

13 ÷ 6 = 2/1
23 ÷ 6 = 3/5
51 ÷ 6 = 8/3
50 ÷ 6 = 8/2
11 ÷ 6 = 1/5
21 ÷ 6 = 3/3

उत्तर 23.8813

खालील उदाहरण थोडे गंमतीचे आहे. उत्तराचा अंक नेहमी एकच हवा. पण येथे 2 अंकी संख्या मध्येच येते. तरी उत्तर चुकत नाही हे विशेष. बघा -

उदा. 29 ने 16502 ला भागा. 29 चे परिवर्तन करून भागायचे. गणित 29 चे परिवर्तन $3\bar{1}$ असे करून घेऊन मांडून घेतले तर असे दिसेल :- (उत्तर 5 दशांश स्थळापर्यंत काढायचे आहे)

3 $\bar{1}$) 1 6 5 0 . 2 0 0 0 0(5 6 ~~8~~ . ~~10~~ 3 4 4 8
1 2 2 0 1 1 2 9 0

स्पष्टीकरण :-

पायरी 1 : 16 ÷ 3 = 5/1. उत्तरात 5 खाली 1.

पायरी 2 : $15 - \bar{5}$ = 20, 20 ÷ 3 = 6/2. उत्तरात 6, खाली 2.

पायरी 3 : $20 - \bar{6}$ = 26, 26 ÷ 3 = 8/2. उत्तरात 8, खाली 2.

उत्तरात दशांश चिन्ह.

पायरी 4 : $22 - \bar{8}$ = 30, 30 ÷ 3 = 10/0 उत्तरात 10, खाली 0

पायरी 5 : उत्तराची संख्या एक अंकी यावयाची ती दोन अंकी आली म्हणून 10 या दोन अंकी उत्तरापैकी दहंस्थानचा 1 डावीकडच्या अंकात (8 मध्ये) मिळवला व 0 उत्तरात घेतले. खाली बाकीचे 0 घेतले. परंतु पुढच्या पायऱ्यांकरिता उत्तराचा अंक 10 हाच जशाच्या तसा गृहित धरला.

पायरी 6 : $00 - \bar{1}\ \bar{0}$ = 10 ÷ 3 = 3/1. उत्तरात 3, खाली 1.

पायरी 7 : $10 - \bar{3}$ = 13 ÷ 3 = 4/1. उत्तरात 4, खाली 1.

पायरी 8 : $10 - \bar{4}$ = 14 ÷ 3 = 4/2. उत्तरात 4, खाली 2.

पायरी 9 : $20 - \bar{4}$ = 24 ÷ 3 = 8/0. उत्तरात 8, खाली 0.

उत्तर :- 569.03448

पाठ - 6

भागाकार करताना अडलेल्या ठिकाणी ‘क्ष’ चा वापर

अ) मागच्या उदाहरणात भाग देताना 10 चा भाग गेला हे आपण पाहिले. अशावेळी तेथे जे केले ते आता नियमबद्ध करू या !

समजा, भागताना मध्येच कुठे तरी भाज्य 22 आहे नि भाजक 2 आहे ! साहजिकच भाग 22 ÷ 2 = 11/0 असा जाईल. व उत्तराचा एक अंक मिळण्याऐवजी दोन अंकी संख्या (11) उत्तरात घ्यावी लागेल. अशावेळी काय करायचे ? उपाय फारच सोपा आहे. त्या त्या जागी क्ष, $क्ष^1$, $क्ष^2$ वगैरे टाकावे व पुढे जावे. गणित पुरे झाल्यावर ‘क्ष’ वगैरेच्या किंमती टाकल्या की अंतिम उत्तर हाती येते.

उदा. 17600 ÷ 29 = ? (उत्तर 3 दशांश स्थलापर्यंत हवे.)

उत्तर असे काढायचे. 29 = 3$\bar{1}$

3 $\bar{1}$) 1 7 6 0 . 0 0 0 (5 क्ष 6.896
2 1 2 2 1 = 5 (10) 6.896
= 606.896

स्पष्टीकरण

पायरी 1

17 ÷ 3 = 5/2. उत्तरात 5, 2 खाली.

पायरी 2

26 - (5 × $\bar{1}$) = 31 ÷ 3 = 10/1. येथे 10 ही दोन अंकी संख्या आल्याने 10 चे जागी उत्तरात क्ष लिहा व बाकी 1 खाली लिहा. (26 मधून उणे 5 वजा करणे म्हणजेच 26 मधे 5 मिळविणे हा नियम तोंडपाठ आहे ना ?)

पायरी 3

10 - (10 × $\bar{1}$) = 20 ÷ 3 = 6/2 (येथे द्वंद्वाची किंमत काढण्यासाठी क्ष = 10 हे लक्षात घ्यावे. उत्तरात 6, खाली 2.

पायरी 4

20 - (6 × $\bar{1}$) = 26 ÷ 3 = 8/2. उत्तरात 8, खाली 2

पायरी 5

20 - (8 × $\bar{1}$) = 28 ÷ 3 = 9/1. उत्तरात 9 खाली 1

पायरी 6

$10 - (9 \times \bar{1}) = 19 \div 3 = 6/1$. उत्तरात 6, खाली 1.

शेवटची पायरी

उत्तर 5 क्ष 6.896 असे आले आहे. क्ष च्या जागी 10 घालायचे म्हणजेच क्ष चे जागी 0 लिहून 1 डावीकडच्या अंकात मिळवावयाचा. 5 क्ष 6 म्हणजेच 606. उत्तर 606.896. दशांशातील उत्तराची बाकी कशी काढायची ते मागे दिलेलेच आहे. त्यासाठी नवसंख्या 20 एवढे पुरे आहे.

```
        606.000
     ----------
 3 1̄)17 60.000(
           2
```

$20 - (6 \times \bar{1}) = 26$ बाकी.

ब) बऱ्याचदा एखादा भाग देताना आपण चुकतो. अशा वेळी देखील हा 'क्ष' गुप्तपणे येऊन आपली चूक दुरुस्त करून देईल

बघायची आहे ही मजा तुम्हाला ?

खाली प्रथम उदाहरण बरोबर सोडवू. मग त्यात एक मुद्दाम चूक करू. बघू हा **'क्ष'** ती चूक कशी दुरुस्त करील ते.

उदा. 21501 ला 29 ने भागा.

पायरी 1

29 चे परिवर्तन करून घेतले. $29 = 3\bar{1}$

```
 3 1̄)2150.100 (741.413
        0 0 1  0 1 2
```

उत्तराचा दर अंक	स्पष्टीकरण
7	$21 \div 3 = 7/0$
4	$05 - (7 \times \bar{1}) = 12 \div 3 = 4/0$
1	$00 - (4 \times \bar{1}) = 4 \div 3 = 1/1$
4	$11 - (1 \times \bar{1}) = 12 \div 3 = 4/0$
1	$00 - (4 \times \bar{1}) = 4 \div 3 = 1/1$
3	$10 - (1 \times \bar{1}) = 11 \div 3 = 3/2$

आता हेच उदाहरण चूक करून सोडवू या. पहिलाच भाग देताना चूक करू. $21 \div 3 = 7/0$ येतात. आपण $21 \div 3 = 6/3$ असे धरू. गणित पुढे

पुढे असे सरकेल -

3 $\bar{1}$)2 1 5 0 . 1 0 0(6 क्ष क्ष^1.4

3 2 0 0

उत्तराचा दर अंक	स्पष्टीकरण
6	$21 \div 3 = 6/3$
क्ष	$35 - (6 \times \bar{1}) = 41 \div 3 = 13/2$
	13 = क्ष
क्ष^1	$20 - (13 \times \bar{1}) = 33 \div 3 = 11/0$
	11 = क्ष^1
	$01 - (11 \times \bar{1}) = 12 \div 3 = 4/0$

आता उत्तर 6 क्ष क्ष^1.4 आले. त्यात क्ष व क्ष^1 च्या किंमती घातल्या की 6 (13) (11) .4 येईल. दर एकं स्थान उत्तरात ठेवा. दहं स्थान डावीकडच्या अंकात मिळवा. उत्तर 741.4

आले की नाही उत्तर 'क्ष' मुळे बरोबर ?

पाठ 7

रोजच्या व्यवहारात लागणारी ढोबळ उत्तरे

प्रत्यक्ष एका संख्येने दुसऱ्या संख्येला भागावयाचे असेल तेव्हा आपल्याला एक ते दोन दशांश स्थळापर्यंत उत्तर बरोबर यावे एवढाच आकडेमोडीत रस असतो. अशावेळी द्रुतगती रीतीनेही अखेरीपर्यंत उत्तर काढीत बसण्याची गरज नाही.

1) समजा, भाजक संख्येत दशांश चिन्ह आहे. (821.3) द्रुतगती भागाकारात या भाजकाचे सुभाजक व शेष भाजक असे जे दोन भाग पाडावयाचे ते 8 व 213 असे होणार. तेव्हा नियम हा की, दशांश चिन्ह किती घरे व कुठल्या दिशेने सरकवले की ते 8 व 213 मध्ये येईल ते पाहा. 821.3 = 8.213 = **दशांश चिन्ह दोन घरे डावीकडे.**

2) भाजक लिहिताना आता दशांश चिन्ह विसरा व नेहमीप्रमाणे लिहा. (8231)

3) भाज्य समजा 6341.18 आहे. म्हणजेच भाज्यातही दशांश चिन्ह आहे. भाजकात किती घरे व कुठल्या दिशेने चिन्ह सरकवले ? नेमकी तितकीच घरे व त्याच दिशेने भाज्य संख्येचेही चिन्ह सरकवयाचे. 6341.18 = 63.4118

म्हणजे सुधारित उदाहरण 63.4118 ÷ 8.213 झाले.

4) संपूर्ण उत्तर सोडवले तर कितीतरी दशांशस्थळे मिळतील. पण आपणास फक्त पूर्णांक व पुढे 3 दशांशस्थलातच रस आहे. अशावेळी आपोआप केवढे भाज्य मांडून घ्यावयाचे ते सुरुवातीलाच कळेल व उदाहरणच मर्यादित होईल.

मूळ उदाहरण = 6341.18 ला 821.30 ने भागा.

मर्यादित उदाहरण = 63.411 ÷ 8.213

आता नेहमीप्रमाणे द्रुतरीतीने सोडवावयचे -

मनात करावयाचे गणित

1) 63 ÷ 8 = 7/7	8213) 6 3 . 4 1 1 (7.721
2) 74 - (7 × 2) = 60 ÷ 8 = 7/4	7 4 4
3) 41 - {(7 × 2) + (7 × 1)} = 20 ÷ 8 = 2/4	
4) 41 - {(2 × 2) + (7 × 1) + (7 × 3)}	
= 9 ÷ 8 = 1/1	

उत्तर अवघ्या चार टप्प्यात आले. उत्तर 7.721

***

(सूचना : प्रकरणे 5 ते 9 यांच्या **अधिक** समजुतीसाठी शिक्षकांनी इंग्रजी वाचू शकणाऱ्या विद्यार्थ्यांना न्यू दिल्लीच्या मे. मोतीलाल बनारसीदास यांनी प्रकाशित केलेल्या 'Vedic mathematics' या पुस्तकाच्या वाचनाची शिफारस अवश्य करावी. वैदिक गणिताचा जनसामान्यात प्रसार व्हावा या एकमेव उद्देशाने भागाकार विषय आकर्षक करून तपशीलात इतर भारतीय भागाकार पद्धतीच्या समवेत येथे असा अधिक संशोधित व अधिक विकसित स्वरूपात अंतर्भूत केला आहे.)

प्रकरण 10 वे

गणितच बदलून भागाकार

इतका वेळ आपण फक्त भाजक बदलून घेत भागाकाराच्या काही सोप्या रीती बसवत गेलो.

पण भाजकाला जे कराल तेच भाज्याला केले तरी गणित बदलत नाही या नियमाचा फायदा घेऊन भाज्य नि भाजक दोन्हीही बदलून अधिक झटपट भागाकार आपण करू शकू का ते आता पाहू.

उदाहरणार्थ,

$10{,}000 \div 16 = 625$ हे साऱ्यांना ठाऊक आहे.

आता भाज्य 10,000 नि भाजक 16 दोन्हीवर एकच क्रिया करू या.

दोन्हीला 5 ने गुणू. नवे गणित होईल.

$50{,}000 \div 80$

याचेही उत्तर 625 च येईल.. तपासून बघा. याच भागाकार-वैशिष्ट्याचा वापर करून अपूर्णांकातला भाजक पूर्णांक करून घेऊन एरवी अवघड वाटणारे भागाकार सोपे होऊ शकतील. बघा :-

उदाहरणे

उदा. $36 \div 1\frac{1}{2}$

1) $36 \times 2 = 72$

2) $1\frac{1}{2} \times 2 = 3$

3) $72 \div 3 = \underline{24}$

उदा. $972 \div 1\frac{1}{4}$

1) $972 \times 8 = 7776$

2) $1\frac{1}{4} \times 8 = 10$

3) $7776 \div 10 = \underline{777.6}$

उदा. $343 \div 1\frac{2}{3}$

1) $343 \times 6 = 2058$

2) $1\frac{2}{3} \times 6 = 10$

3) $2058 \div 10 = \underline{205.8}$

***

प्रकरण 11 वे

दशांश पद्धतीत भागाकार फारच सोपा :

1) भाज्य व भाजक यातील दशांश स्थळे सारखी करून घ्यावी.

उदा. 5.5 ÷ 5

नवे गणित असे करून घ्यावे.

55 ÷ 50

2) दोन्ही पूर्णांक समजून भागाकार करा.

3) ताळा : भागाकार झाल्यावर भागफळात दशांश स्थानांची संख्या भाज्य संख्येतील दशांश स्थाने नि भाजक संख्येतील दशांश स्थाने यातल्या वजाबाकीइतकी असते.

वरच्या गणितात (5.5 ÷ 5 मध्ये)

भाज्यात दशांशस्थळे -	1
भाजकात दशांश स्थळे -	0
उत्तरात दशांश स्थळे =	1

आता गणित सोडवा

55 ÷ 50 = 1.1

उत्तरात दशांश स्थळे बरोबर आली आहेत.

उदा. 765.75 ÷ 246.8134 हे गणित सोडवायचे झाल्यास प्रथम दशांश स्थळे सारखी करून घ्या. नवे गणित झाले 7657500 ÷ 2468134. प्रत्यक्ष दोन्ही भागाकार करून बघा. एकच उत्तर (3.1025462) येईल. आहे ना ही युक्ती छान ?

***

प्रकरण 12 वे

संक्षिप्त भागाकार

खूपदा आपणास भागाकाराचे उत्तर म्हणून खूपसे, भरमसाठ लांबच लांब आकड्यांची मालिका मिळते. पण समजा, 1483 रुपये तुम्हास सहा जणात वाटायला कुणी सांगितले. अशावेळी 1483 ÷ 6 च्या उत्तरात 2 दशांश स्थळापर्यंत उत्तर तुम्हास पुरेसे होईल. 247.16666 एवढे मोठे भागफळ कशाला हवे ? 247.16 एवढे उत्तर निघाले तरी तुमचे काम भागेल. त्यामुळे संक्षिप्त भागाकार जर करता आला तर तुमचे कामही भागते व श्रमही वाया जात नाहीत. पण अशी रीत आहे का ?

संक्षिप्त भागाकार कसा करतात ?

1) प्रथम भाजकात एकच अंक पूर्णांक राहील अशा रीतीने भाज्य व भाजकातले दशांश चिन्ह हलवून घ्या.

उदा. 32627417 ÷ 1458478 = किती ?

भाजक बदलला.

नवे उदाहरण

3.2627417 ÷ 1.458478

2) भाज्य व भाजक यांचे निरीक्षण करून भागफळ किती अंकांचे मिळेल याचा अंदाज येतो. येथे भागफळ एक अंकी मिळणार हे उघड आहे.

पूर्ण उत्तरात दशांश स्थळे भरमसाट येतील. तितकी काय करायची ? आपण 4 स्थळापर्यंतच उत्तर हवे असे समजा ठरवले.

धोका नको म्हणून एक जादा अंक असू द्या असेही ठरवू.

मग भाजकात भागफळाचा एक अंक व हे पाच अंक असे एकूण सहा अंक पुरे झाले. 1 + 4 + 1 = 6 साहजिकच भाज्यही तेवढा आकसेल.

नवे गणित =

3.26274 ÷ 1.45847

आता सरळ **नेहमीप्रमाणे** भागाकार मांडा. पण दुसऱ्या पायरीपासून भाजकातला एकेक अंक विचारात घेऊ नका. जो अंक गणितातले काम संपले म्हणून ठरवला त्यावर √ मारली आहे.

```
  √ √ √ √
1.4 5 8 4 7 )   3.2 6 2 7 4 ( 2.2371
                2 9 1 6 9 4          (2 × 145847)
                ------------
                  3 4 5 8 0
                  2 9 1 6 8          (2 × 14584)
                ------------
                    5 4 1 2
                    4 3 7 4          (3 × 1458)
                ------------
                    1 0 3 8
                    1 0 1 5          (7 × 145)
                ------------
                        2 3
                        1 4          (1 × 14)
                ------------
                          9
```

उत्तर 2.2371

इथे थांबू या !

समारोप :

रोजच्या दैनंदिन जीवनात थोडेसे वरिष्ट पातळीवर अधिकारी म्हणून काम करणाऱ्या नोकरदारास किंवा उदयोन्मुख व्यावसायिकास भागाकार या गणित-क्रियेची सतत नितांत गरज पडत असते. उत्पादनाशी तुमचा संबंध असो वा विक्रीशी. सतत दोन भिन्न काळातील वा परिस्थितीतील उत्पादनांची, शुल्कांची, नफ्यांची, तोट्यांची त्यास तुलना करूनच प्रगतीचा मार्ग ठरविता येतो. या तुलनेसाठी त्याला एका मोठ्या संख्येस दुसऱ्याने भागावे लागते व एका संख्येचे दुसरीशी असलेले प्रमाण अशा तऱ्हेने भागून काढावे लागते.

समजा, धंद्यात टिकून राहण्याकरता दरवर्षी विक्रीत किमान 30 टक्के वाढ हवी, असे योजून एखाद्याने धंदा सुरू केला. खालील दोन वर्षाचे आकडे

विक्रीत वाढ होत आहे, एवढे फार तर वर वर पाहता सुचवतील. पण ही वाढ समाधानकारक आहे, का आणखी काही कष्ट आवश्यक आहेत, ते केवळ भागाकारच त्या व्यक्तीस सांगू शकेल.

गेल्या वर्षीची विक्री	**यंदाची विक्री**	**त्यांचे एकमेकांशी प्रमाण**
रुपये	रुपये	
1,08,39,764	1,35,10,742	$\frac{13510742}{10839764} = 1.2464$

पाहिलेत ? विक्रीत फक्त जेमतेम सव्वापट वाढ झाली आहे. म्हणजेच विक्रीच्या पद्धतीत आणखी सुधारणा हवीय हा संदेश त्याला मिळाला.

पण एखाद्या धंदा करणाऱ्याला गणिताचा अन् पर्यायाने भागाकाराचाच कंटाळा असेल तर ? भागाकाराविना तो भागवेल. त्यामुळे प्रगतीसाठी एरवी हाती सहजी येऊ शकणारे हे आयुध न घेताच तो स्पर्धेच्या रणांगणात उतरेल व इतरांकडून पराभूत होईल.

तात्पर्य - झटपट व आश्चर्यकारक वेगाने भागाकार शिकणे म्हणजे गणित शिकणे नव्हेच. हे तर आहे जीवनोपयोगी ज्ञान शिकणे. सर्वच वयात याची जरूर आहे. भागाकार हा विषय केवळ शाळेतील मुलांसाठीच उपयोगी हे म्हणणे चूक ठरेल. या रीती हे मोठ्यांसाठीही एक प्रगतीचे आयुध आहे.

टीप : अपूर्णांक सोडवणे म्हणजेही एक प्रकारचा भागाकारच होय.

तसेच अविभाज्य संख्यांचे दशांशीकरण हे भागाकाराबरोबरच दुसरे नाव आहे.

ह्या प्रकारच्या भागाकारातही आश्चर्यकारक वेग प्राप्त होईल अशा अप्रतिम रीती भारतीय गणितात उपलब्ध आहेत. म्हणूनच ही केवळ **आपली** संपत्ती आहे. तिचा फायदा जगात सर्वप्रथम **आपण भारतीयांनीच** घ्यावयास हवा !

जिज्ञासूंनी याच लेखकाची, **भारतीय द्रुतगणिताच्या अद्भुत रीती** व **द्रुत-गणित वेद** ही पुस्तके चाळल्यास त्यात ह्या सर्व प्रगत गणन रीती एकत्रित स्वरूपात सापडतील.

'नियमित शाळा' कल्पना आता जुनी झाली. आजच्या लहानथोरांना असे नवनवीन काही तरी शिकण्यासाठी **'रविवारच्या शाळा'** आता निघायला हव्या. अशा हौशी शाळांसाठी हे एक मुलखावेगळे क्रमिक पुस्तकच आहे असे मानून स्वतः शिका व इतरांना शिकवा.

इत्यलम् ।

***

इंद्रायणी साहित्याचा एक अपूर्व प्रकल्प

गणित साक्षरता, सामान्यांकरिता गणित, गणिताची गोडी वाढणे ह्या आजच्या नितांत गरजा आहेत.

गणिताचे दर्शन घडत नाही असे एकही शास्त्र नाही. गणितात रस असणारा विज्ञानाच्या कुठल्याही शाखेत सहजी यशस्वी होतो.

पण गणित विषय अवघड, रूक्ष, अगम्य म्हणून दुर्लक्षिला जातोय.

गणित साऱ्यांना सहजी गम्य व्हावं ! पण गणित गम्य करावयाचं तर ते प्रथम रम्य तर केलं पाहिजे ?

याच एकमेव हेतूने इंद्रायणी प्रकाशनाने हा 'तुमच्या मनात असलेला' प्रकल्प त्वरित हाती घेतला आहे.

खूप मनोरंजन करणाऱ्या आश्चर्यकारक माहितीने ओतप्रोत भरलेली, गणित विषयाला कलात्मकतेने हाताळणारी पुढील प्रकाशने हा या प्रकल्पाचाच भाग होय.

द्रूत-गणित वेद

भारतीय द्रूत-गणिताच्या अद्‌भुत रीती

चकित करणारी गणिते

मनोरंजक शून्य

गणितातील गमती

गणितातील रंजक खेळ

झटपट गुणाकाराच्या भारतीय पद्धती

आश्चर्यकारक वेगाने भागाकार.

यातील प्रत्येक पुस्तक गणितावर प्रेम करणाऱ्यासाठी अगदी मेजवानी ठरेल. रसाळ, हलक्या-फुलक्या व सुबोध भाषेत गणितावर लेखन करणारे जगप्रसिद्ध शीघ्र-गणिती श्री श्याम मराठे ह्या सर्व पुस्तकांचे लेखक आहेत.

गणिताबद्दल लहानापासून थोरापर्यंत सर्वांत खरीखुरी गोडी वाढवणारी, कष्टप्रद वाटणाऱ्या क्रमिक अभ्यासक्रमाबाहेरची कथा-कादंबऱ्यांपेक्षा सुरस वाटेल अशा शैलीतील ही सर्व मुलुखावेगळी पुस्तके आपल्या संग्रही हवीतच !

कव्हर छपाई - 'विनायक आर्टस्' पुणे ३०